1. $a > b > 1$ 인 실수 $a,\ b$ 에 대하여 다음 중 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ ② $\dfrac{a}{1-a} > \dfrac{b}{1-b}$ ③ $a+3 < b+3$

④ $a-1 < b-1$ ⑤ $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$

해설

① 양변에 ab 를 곱하면 주어진 조건과 다르게 나온다.

② $1-a<0, 1-b<0$ 에서 $(1-a)(1-b)>0$ 이므로
양변에 $(1-a)(1-b)$를 곱하면
$a(1-b) > b(1-a),\ a-ab > b-ab,\ a>b$
주어진 조건에 만족한다.

③ 양변에 3을 빼주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

④ 양변에 1을 더해주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

⑤ $1+a>0, 1+b>0$ 이므로 $(1+a)(1+b)$ 를 양변에 곱하면
$a(1+b) < b(1+a)$
$a+ab < b+ab$
$a<b$
주어진 조건을 만족하지 않는다.

2. $0 < a < b$인 실수, a, b에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$ ② $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$ ④ $\dfrac{a}{1+a} \geq \dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$0 < a < b$에서 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\dfrac{1}{a} + 1 > \dfrac{1}{b} + 1$, $\dfrac{1+a}{a} > \dfrac{1+b}{b} \cdots$ ㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$

3. $-2 \le x \le 3$일 때, $3x-1$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$-2 \le x \le 3$에서 $-6 \le 3x \le 9$, $-7 \le 3x-1 \le 8$
따라서, 최댓값은 8이고 최솟값은 -7이므로 두 값의 합은 1이다.

4. $-2 \le x \le 2$일 때, $\dfrac{20}{3-x}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$-2 \le x \le 2$에서

$-2 \le -x \le 2,$

$1 \le 3 - x \le 5$

$\dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{3-x} \le 1$

$\therefore 4 \le \dfrac{20}{3-x} \le 20$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

5. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$

② $x \geq -1$

③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$

⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2$

6. 두 실수 a, b에 대하여 부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$ 일 때, 부등식 $bx > 2a + 4b$의 해는?

① $x > 0$ ② $x > 1$ ③ $x > 2$ ④ $x > 3$ ⑤ $x > 4$

해설

부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$로 부등호의 방향이 바뀌었으므로

$a < 0$

이때, $x < \frac{b}{a}$에서 $\frac{b}{a} = -2 \therefore b = -2a$

따라서 $bx > 2a + 4b$ 에서 $b = -2a$ 를 대입하면

$-2ax > 2a + 4 \cdot (-2a)$

$-2ax > -6a$

$a < 0$에서 $-2a > 0$이므로

$x > \frac{-6a}{-2a} \therefore x > 3$

7. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $A > B > 0,\ C > D > 0$이면 $AC > BD$이다.

② $A > B,\ C > D$이면 $A + C > B + D$이다.

③ $A > B > 0$이면 $A^2 > B^2$이다.

④ $A > B$이면 $\dfrac{1}{A} < \dfrac{1}{B}$이다.

⑤ $A > 0 > B$이면 $\dfrac{1}{A} > \dfrac{1}{B}$이다.

해설

④ 만약 $B < 0 < A$인 경우라면 $\dfrac{1}{A} > \dfrac{1}{B}$가 되어 주어진 문장은 틀리다.

8. $-1 < x < 3$일 때, $A = 2x - 3$의 범위는?

① $1 < A < 3$　② $-1 < A < 3$　③ $-3 < A < 5$

④ $-5 < A < 3$　⑤ $3 < A < 5$

해설

$-1 < x < 3$에서 양변에 2를 곱하고 3을 빼면

$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$

$\therefore\ -5 < 2x - 3 < 3$

9. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

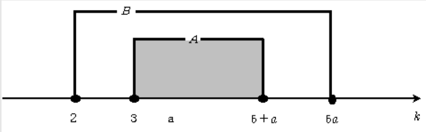
① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

10. x에 대한 부등식 $x+2 \leq ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x+2 \leq ax+3$에서 $(1-a)x \leq 1$이 부등식의 해가 모든 실수이고 우변이 양수이므로 x의 계수는 0이어야 한다.

$1-a=0$

$\therefore a=1$

11. 부등식 $ax-b^2>bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a의 조건은? (a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1<a<1$

② $a=b$이고 $-2<a<2$

③ $a=b$이고 $-3<a<3$

④ $a=b$이고 $-4<a<4$

⑤ $a=b$이고 $-5<a<5$

해설

$ax-b^2>bx+a^2-8$에서

$(a-b)x-b^2-a^2+8>0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로

$a=b$

$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$

$\therefore a^2<4$ 이므로 $-2<a<2$

즉 $a=b$ 이고 $-2<a<2$

12. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x - 1 > m(x - 1)$$

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$m^2x - 1 > m(x - 1)$에서

$m^{2x} - 1 > mx - m$

$\therefore (m^2 - m)x > 1 - m \cdots$ ㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2 - m = 0,\ 1 - m \geq 0$

$m^2 - m = 0$에서 $m(m - 1) - 0$

$\therefore m = 0$ 또는 $1 \cdots$ ㉡

$1 - m \geq 0$에서 $m \leq 1 \cdots$ ㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m = 0$ 또는 $m = 1$

13. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1>2kx+k$가 성립할 때, k값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$k^2x+1>2kx+k$에서
$(k^2-2k)x>k-1$,
$k(k-2)x>k-1$
해가 모든 실수이므로
$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.
$\therefore\ k=0$

14. $ax+b>0$의 해가 $x<2$일 때, $(a+b)x<5b$의 해는?

① $x>5$ ② $x>10$ ③ $x<1$

④ $x<5$ ⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$에서 $ax>-b$

해가 $x<2$ 이므로

$a<0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-\dfrac{b}{a}=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 정리하면 $b=-2a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢에서 $b=-2a$를 $(a+b)x<5b$에 대입하면

$(a-2a)x<5\cdot(-2a)$, $-ax<-10a$

㉠에서 $a<0$이므로 $x<10$

15. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$
④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$ ㉠
㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$ ㉡
㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\quad -a+2b=a+b$
$\therefore 2a=b\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$
㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면
$(2a-3a)x+a+4a>0,\quad -ax>-5a \quad \therefore x>5$

16. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

② $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 이다.

③ $a > b > 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$ 이다.

⑤ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 이다.

해설

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$

반례 : $a,\ b,\ c,\ d$ 가 음수인 경우는 $ac < bd$

17. $abc < 0$, $\dfrac{a-b}{c} > 0$인 세 실수 a, b, c에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $c > 0$이면 $a > b$이다.
② $a > 0$이면 $c < 0$이다.
③ $a > b$이면 $b < 0$이다.
④ $a > b$이면 $a > 0$이다.
⑤ $a < b$이면 $ab > 0$이다.

해설

① $c > 0$이면, $\dfrac{a-b}{c} > 0$에서 $a-b > 0$ 즉, $a > b$

② $a > 0$이면, $b < 0$, $c > 0$일 때도 두 부등식이 성립하므로 $c < 0$라고 말할 수 없다.

③, ④ $a > b$이면, $\dfrac{a-b}{c} > 0$에서 $c > 0$이므로 $ab < 0$이다.

따라서, $a > b$, $ab < 0$에서 $a > 0$, $b < 0$이다.

⑤ $a < b$이면, $\dfrac{a-b}{c} > 0$에서 $c < 0$이다.

따라서, $ab > 0$

18. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a>b,\ \ b>c,\ \ c>d$이면 $a>d$
㉡ $a>b>0$이면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
㉢ $a>b>0,\ \ c>d>0$이면 $ac>bd$
㉣ $ac>bc$이면 $a>b$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $a>b,\ \ b>c$이면 $a>c$

$a>c,\ \ c>d$이면 $a>d$ (참)

㉡ $a>b>0$이므로 $a-b>0,\ ab>0$이다.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{a-b}{ab}>0 \therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$ (참)

㉢ $c>d$이고 $a>0$이므로 $ac>ad$

$a>b$이고 $d>0$이므로 $ad>bd$

따라서 $ac>bd$(참)

㉣ $c<0$일 때 $ac>bc$이면 $a<b$이다. (거짓)

19. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

20. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\dfrac{3b-2a}{a+b}=-\dfrac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \quad b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

21. 부등식 $bx+(a-b)<0$의 해가 $x>2$일 때, 부등식 $ax+2a-b>0$의 해를 구하면?

① $x>-1$　② $x<-1$　③ $x>-2$　④ $x<-2$　⑤ $x>-3$

해설

$bx+(a-b)<0$의 해가 $x>2$이려면

$b<0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{b-a}{b}=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $b-a=2b$ $\therefore\ a=-b$

㉠에서 $b<0$이므로 $a>0$

$ax+2a-b>0$에서 $ax+2a+a>0$ $\therefore\ ax>-3a$

$a>0$ 이므로 $x>-3$

22. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$중 $x + y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M + 2m$의 값을 구하면?

① -9　　② -13　　③ -18　　④ -22　　⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠

$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times(-2) +$ ㉡을 하면

$-10 < -2x - 10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢

$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣

㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$

그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$

그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면

$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$

따라서, $x + y$의 최댓값은$-3 + 1 = -2$이고,

최솟값은$-11 + 3 = -8$이다.

$\therefore\ M = -2,\ m = -8\ \ \therefore\ \ M + 2m = -18$

23. 함수 $f(x)=ax+b$가 $2 \le f(1) \le 4$, $0 \le f(2) \le 3$을 만족할 때, $f(3)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(1)=a+b,\ f(2)=2a+b$

$f(3)=3a+b$이므로 $f(3)=2f(2)-f(1)$

조건에서 $2 \le f(1) \le 4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$0 \le f(2) \le 3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 각 변에 -1을 곱하면

$-4 \le -f(1) \le -2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 각 변에 2를 곱하면

$0 \le 2f(2) \le 6$ $\cdots\cdots$ ㉣

$\therefore\ -4 \le f(3) \le 4$

따라서, $f(3)$의 최댓값은 4 , 최솟값은 -4 이다.

24. $a < 0$이고 $a + b = 0$일 때, 부등식 $(a - b)x - a - 2b < 0$의 해는?

① $x < -\frac{1}{2}$　　② $x > -\frac{1}{2}$　　③ $x > 2$

④ $x < -2$　　⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$에서 $b = -a$를 부등식에 대입하면

$(a + a)x - a + 2a < 0,\ 2ax + a < 0,\ 2ax < -a$

$\therefore\ x > -\frac{1}{2} (\because\ 2a < 0)$

25. x에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b<0$의 해가 $x>1$일 때, x에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b>0$을 풀면?

① $x>\frac{1}{3}$ ② $x<\frac{1}{3}$ ③ $x>-\frac{4}{3}$ ④ $x<-\frac{4}{3}$ ⑤ $x>\frac{7}{3}$

해설

$a+2b<0,\ \dfrac{-(a-b)}{a+2b}=1$

$\therefore\ b=-2a$이므로

$(a-b)x+2a-b=a(3x+4)>0$

$a>0$을 이용하면

$\therefore\ 3x+4>0\ \ \therefore\ x>-\dfrac{4}{3}$