

1. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1 - 2i)z - i\bar{z} = 3 - 5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1 + i$

② $2 + i$

③ $2 + 2i$

④ $1 - i$

⑤ $2 - i$

해설

$z = a + bi$ 라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

$$\begin{aligned}(1 - 2i)(a + bi) - i(a - bi) &= a + bi - 2ai + 2b - ai - b \\ &= (a + b) + (-3a + b)i = 3 - 5i\end{aligned}$$

따라서 $a + b = 3$, $-3a + b = -5$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 1$$

따라서 $z = 2 + i$ 이다.

2. $(2-i)\bar{z} + 4iz = -1 + 4i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은 ?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$z = a + bi \text{라 놓으면 } \bar{z} = a - bi$$

$$(2-i)(a-bi) + 4i(a+bi) = -1 + 4i$$

$$(2a-5b) + (3a-2b)i = -1 + 4i$$

$$\therefore 2a-5b = -1 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$3a-2b = 4 \cdots \textcircled{\Delta}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta} \text{을 연립하여 풀면 } a=2, b=1$$

$$\therefore z = 2 + i, \quad \bar{z} = 2 - i$$

$$\therefore z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 5$$

3. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i \text{에서}$$

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{이므로 연립하면}$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

4. 등식 $(1+i)z + (2z-3i)i = 0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$

② $-3+9i$

③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i$

⑤ $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면

$$(1+i)(a+bi) + \{2(a+bi) - 3i\}i = 0$$

$$(a+bi+ai-b) + (2ai-2b+3) = 0$$

$$(a-3b+3) + (3a+b)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-3b+3=0, 3a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{3}{10}, b = \frac{9}{10}$$

$$\therefore z = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$$

5. x 의 범위가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$y = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$$

$$\Rightarrow m : x = 1 \text{ 일 때} : -2,$$

$$M : x = -3 \text{ 일 때} : 14$$

$$\therefore m + M = 12$$

6. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점(1, 1) 을 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

7. $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3

② 7

③ -2

④ 0

⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 x 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ ($0 \leq x \leq 3$) 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \text{ 에서}$$

$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,

$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0

$$\text{최댓값} + \text{최솟값} = -4$$

9. x 에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$$

A , B 의 최대공약수는 $A - B$ 의 인수이므로

A , B 의 최대공약수를 G 라 하면

G 는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$ 는 A 의 인수이어야 하므로

$$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 2$ 이므로 $k = 2$

10. 두 상수 a 와 b 에 대하여 다음 두 다항식의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

$$x^2 + ax - 6, \quad x^2 - ax + b$$

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

왼쪽의 식 $f(2) = 4 + 2a - 6 = 0 \therefore a = 1$

오른쪽의 식 $g(2) = 4 - 2a + b = 0$ 에서

$a = 1$ 이므로 $b = -2$

$\therefore a + b = 1 + (-2) = -1$

11. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $2x^3 + (a-2)x^2 + ax - 2a$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$$

$$2x^3 + (a-2)x^2 + ax - 2a = (x-1)(2x^2 + ax + 2a)$$

최대공약수가 이차식이 되기 위해서는

$$f(x) = 2x^2 + ax + 2a \text{가 } x+1$$

또는 $x+2$ 를 인수로 가져야 한다.

그런데 $f(-2) = 8 - 2a + 2a \neq 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x+2$ 를 인수로 가지지 않는다.

따라서, $f(-1) = 2 - a + 2a = 0 \therefore a = -2$

12. 일차식 $f(x)$ 와 이차식 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x+1$ 이고, 두 식의 곱은 $f(x)g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 일 때, ab 의 값은?

① 0

② 5

③ 10

④ 15

⑤ 20

해설

최대공약수가 $x+1$ 이고 두 식의 곱이 최고차항의 계수가 1
이므로

$$f(x) = x+1, g(x) = (x+1)(x+c)$$

$$f(x)g(x) = (x+1)(x+1)(x+c)$$

$$= x^3 + (c+2)x^2 + (2c+1)x + c$$

$$= x^3 - x^2 + ax + b$$

$$\text{계수를 비교하면 } c+2 = -1, 2c+1 = a, b = c$$

$$\therefore c = -3, a = -5, b = -3$$

$$\therefore ab = 15$$

해설

$f(x)g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 는 $x+1$ 로 두 번 나누어 떨어진다.

조립제법으로 나누어 보면

$$-a + b - 2 = 0, a + 5 = 0$$

$$\therefore a = -5, b = -3 \text{ 이므로 } ab = 15$$

13. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x - 2$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ 일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1이다.)

① $2x^2 - 6x + 8$

② $2x^2 - 6x + 7$

③ $2x^2 - 8x + 8$

④ $2x^2 - 9x + 10$

⑤ $2x^2 + 6x + 9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x - 2$ 이므로
두 다항식은 $(x - 2)a, (x - 2)b$ (a, b 는 서로소)

$$\begin{aligned}\text{최소공배수 } (x - 2)ab &= x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \\ &= (x - 2)(x + 1)(x - 5)\end{aligned}$$

그러므로 $a = x - 5, b = x + 1$

또는 $a = x + 1, b = x - 5$

따라서 두 다항식은

$$(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10,$$

$$(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$$

$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2 - 8x + 8$

14. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x - 1$, 최소공배수가 $x^3 - 3x + 2$ 일 때, $A + B$ 는?

① $2x^2 - x - 1$

② $2x^2 + x + 1$

③ $2x^2 - 2x - 1$

④ $2x^2 - 2x + 1$

⑤ $2x^2 - 2x + 3$

해설

$$G = x - 1, L = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$A = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1, B = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$$

$$A + B = 2x^2 - x - 1$$

15. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x - 1$, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 합은?

- ① $2x^2 - 3x + 1$ ② $2x^2 - 2x - 1$ ③ $2x^2 + 3x - 5$
④ $2x^2 + 2x - 4$ ⑤ $2x^2 + 3x - 3$

해설

구하는 다항식을 A, B 라고 하면

$$\begin{aligned} AB &= (x-1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-1)^2(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

A, B 의 최대공약수가 $x-1$ 이므로

$$A = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

$$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore A + B = 2x^2 - 3x + 1$$

16. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 2x$ 일 때, 두 이차식의 합을 구하면?

① $2x^2 - 1$

② $2x^2 - 2$

③ $2x^2 - 3$

④ $2x^2 + 1$

⑤ $2x^2 + 2$

해설

두 다항식은 $(x-1)a, (x-1)b$ (a, b 는 서로소)

$$x^3 + x^2 - 2x = (x-1)ab = x(x+2)(x-1)$$

두 다항식은 $x(x-1), (x+2)(x-1)$

$\therefore$ 두식의 합은 $2x^2 - 2$

17. $a < 0, b < 0$ 일 때 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3 b} = -a \sqrt{ab}$

③ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{b \sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$

해설

$a < 0, b < 0$ 이므로,

$$\begin{aligned} \text{① } \sqrt{a} \sqrt{b} &= \sqrt{-a} i \sqrt{-b} i \\ &= \sqrt{-a} \sqrt{-b} i^2 \\ &= -\sqrt{-a} \sqrt{-b} \\ &= -\sqrt{ab} \end{aligned}$$

($\because -a > 0, -b > 0$)

따라서, $\sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

$$\begin{aligned} \text{② } \sqrt{a^3 b} &= \sqrt{a^2 \cdot (ab)} \\ &= \sqrt{a^2} \sqrt{ab} \\ &= |a| \sqrt{ab} \\ &= -a \sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$\text{③ } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\text{④ } \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{|b|}{\sqrt{a}} = -\frac{b}{\sqrt{a}} = -\frac{b \sqrt{a}}{|a|} = \frac{b \sqrt{a}}{a}$$

$$\text{⑤ } \sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$$

18. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

② $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

해설

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
 $= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
 $= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

19. 실수 a 에 대하여 $\sqrt{a} \sqrt{a-1} = -\sqrt{a(a-1)}$, $\sqrt{\frac{b}{b-1}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b-1}}$ 일 때, $|a| + |b-1| + |a-b|$ 의 값을 구하면?

① -2

② 1

③ $-2a + 1$

④ $-2b - 1$

⑤ $-2a - 2b - 1$

해설

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1} = -\sqrt{a(a-1)}$ 이므로
 $a \leq 0, a-1 \leq 0$ 이다.

$\therefore a \leq 0, \sqrt{\frac{b}{b-1}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b-1}}$ 이므로 $b-1 < 0, b \geq 0$ 이다.

$\therefore 0 \leq b < 1$

$\therefore a - b \leq 0$

$$\begin{aligned} \therefore |a| + |b-1| + |a-b| &= -a - (b-1) - (a-b) \\ &= -2a + 1 \end{aligned}$$

20. 두 실수 x, y 가 $x + y = -5$, $xy = 2$ 를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x + y = -5$, $xy = 2$ 에서 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{x+y}{-\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

21. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$ 을 풀면?

① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$

② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$

③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$

⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + 6x = X \text{ 로 놓으면}$$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$

$$X(X+8) + 15 = 0,$$

$$X^2 + 8X + 15 = 0$$

$$(X+3)(X+5) = 0$$

$$\therefore X = -3, X = -5$$

$$\textcircled{㉠} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$\textcircled{㉡} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

22. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면

$$X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$$

$\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$

(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -2$

(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

23. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1

② 0

③ -1

④ -2

⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$

24. 방정식 $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 10

해설

$(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$ 에서

$x^2 + x = A$ 라 하면

$$A^2 + 2A - 8 = 0,$$

$$(A + 4)(A - 2) = 0$$

$$\therefore A = -4 \text{ 또는 } A = 2$$

(i) $x^2 + x = -4$ 일 때,

$$x^2 + x + 4 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

(ii) $x^2 + x = 2$ 일 때,

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

(i), (ii)에서 실근은 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 이므로 실근의 합은 $-2 + 1 = -1$

25. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4 \text{에서}$$

$$x^2 + x + 2 = A \text{라 하면}$$

$$A^2 = A + 2,$$

$$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$$

$$\therefore A = -1 \text{ 또는 } A = 2$$

$$(i) \ x^2 + x + 2 = -1 \text{ 일 때, } x^2 + x + 3 = 0$$

$$(ii) \ x^2 + x + 2 = 2 \text{ 일 때, } x^2 + x = 0$$

(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$$

26. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

① 4

② -4

③ -2

④ $1 + i$

⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ 또는 } X = -2$$

$$(i) X = 8 \text{ 일 때 } x^2 - 2x = 8 \text{ 에서 } (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

$$(ii) X = -2 \text{ 일 때 } x^2 - 2x = -2 \text{ 에서 } x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm i$$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

27. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

28. 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15

② 16

③ -16

④ 17

⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = 6, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7, \alpha\beta\gamma = 5$$

$$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

해설

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

29. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4 - 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

30. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값은?

① $-p$

② p

③ 0

④ 3

⑤ -3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$ 이 된다.

31. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot (2) = 9 - 4 = 5$$

32. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4, \alpha\beta\gamma = -3 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\ &= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 2 + 4 + 3 = 6 \end{aligned}$$

33. 다음은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도하는 과정을 나타낸 것이다. 이 때, (가) ~ (매)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면 이 방정식의 좌변은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(\text{가})(x - \beta)(x - \gamma)$$

이 때, 이 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(\text{나})x^2 + a(\text{다})x - a(\text{라}) \text{가 되는데}$$

이것은 x 에 대한 (매)이다.

따라서, 이 등식의 동류항의 계수는 서로 같아야 하므로

$$b = -a(\text{나}), c = a(\text{다}), d = -a(\text{라})$$

각 식의 양변을 a 로 나누고, 좌변과 우변을 바꾸어 쓰면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

① (가) $x + a$

② (나) $\alpha + \beta + \gamma$

③ (다) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

④ (라) $\alpha\beta\gamma$

⑤ (매) 항등식

해설

(가) $x - \alpha$

34. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 3$$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$$-1 + 2 + 3 = 4 \quad \therefore a = -4$$

$$(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \quad \therefore b = 1$$

$$\text{세 근의 곱 } (-1) \times 2 \times 3 = -6 \quad \therefore c = 6$$

$$\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$$

35. 방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\ &= 1 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 1 + 2 - (-1) - 5 = -1 \end{aligned}$$

36. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉡ 식 $+ 2 \times$ ㉠ 식에 대입하면

$$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$$

$$\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$$

㉠: $3x = y$ 를 ㉠식에 대입하면

$$7x^2 = 7 \quad x = 1 (x > 0), \quad y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

㉠: $2x = 3y$ 를 $4 \times$ ㉠식에 대입하면

$$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2 (y > 0), \quad x = 3$$

$$\therefore x + y = 5$$

$$a > b \text{ 이므로 } a = 5, b = 4$$

$$\therefore a - b = 1$$

37. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$, $y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y$, $x = -2y$ 각각을 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0$, $-2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$ 일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$x = \alpha, y = \beta \text{라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

38. $x = \alpha$, $y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \quad \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{불능}$$

$x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y \pm 1, x \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

39. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

40. 이차방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때 $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1}$ 의 값은?

① 4

② 1

③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{6}$

⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 1 = 0$ 에서 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 = 3 > 0$ 이므로

a, b 는 서로 다른 실수이고, 근과 계수의 관계에 의하여
 $a + b = 4, ab = 1$ 이므로 $a > 0, b > 0$

a, b 를 식에 대입하면

$$a^2 - 4a + 1 = 0, b^2 - 4b + 1 = 0$$

$$\therefore a^2 + 1 = 4a, b^2 + 1 = 4b$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} = \sqrt{4a} + \sqrt{4b}$$

$$= 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) (\because a > 0, b > 0)$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$= 6 (\because a + b = 4, ab = 1)$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6}$$

41. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 1$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$$

$$\text{따라서 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$$

42. 이차방정식 $x^2 + kx + k - 1 = 0$ 의 한 근이 다른 한 근의 3배가 되도록 하는 상수 k 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

한 근이 다른 한 근의 3배이므로 두 근을 α , 3α 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 3\alpha = -k \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \cdot 3\alpha = k - 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $\alpha = -\frac{k}{4}$ 이것을 ㉡에 대입하면

$$3\left(-\frac{k}{4}\right)^2 = k - 1, \quad 3k^2 - 16k + 16 = 0, \quad (3k - 4)(k - 4) = 0$$

$$\therefore k = 4$$

해설

43. $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$ 의 값을 구하면?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 13

해설

α, β 가 $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + (p-3)\alpha + 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$\beta^2 + (p-3)\beta + 1 = 0 \dots\dots ②$$

$$①\text{에서 } 1 + p\alpha + \alpha^2 = 3\alpha$$

$$②\text{에서 } 1 + p\beta + \beta^2 = 3\beta$$

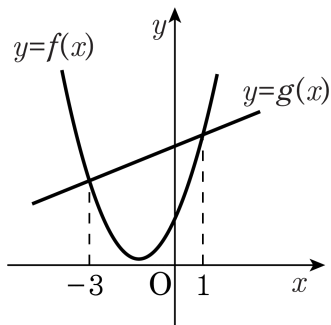
$$\therefore (1 + p\alpha + \alpha^2)(1 + p\beta + \beta^2)$$

$$= 3\alpha \cdot 3\beta$$

$$= 9\alpha\beta$$

$$= 9 (\because \alpha\beta = 1)$$

44. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8

② -6

③ -4

④ 2

⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$$\begin{aligned} 2x^2 + ax + 4 &= cx + d \\ \Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d &= 0 \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

근이 -3, 1 이므로

$2(x + 3)(x - 1) = 0$ 과 일치한다.

⑦과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

45. 이차함수 $y = (x - 5)^2 + 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{PQ} = 10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 16

② 20

③ 22

④ 26

⑤ 30

해설

이차함수 $y = (x - 5)^2 + 1$ 의 그래프는
직선 $x = 5$ 에 대하여 대칭이고
 $\overline{PQ} = 10$ 이므로 두 점 P, Q 의 x 좌표는
각각 0, 10 이다.

따라서 점 P (또는 Q) 의 y 좌표를 구하면

$$(0 - 5)^2 + 1 = 26 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a = 26$$

46. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

① $a = -1$, $b = -1$

② $a = -1$, $b = 0$

③ $a = 1$, $b = 0$

④ $a = 1$, $b = -1$

⑤ $a = 0$, $b = 1$

해설

$$y = ax^2 + bx + 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y = -x + 6 \quad \dots \textcircled{3}$$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

교점은 $(2, 4)$, $(-1, 7)$ 이고,

이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$$4a + 2b + 8 = 4, \quad a - b + 8 = 7$$

$$\therefore a = -1, \quad b = 0$$

47. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 5x + b$ 가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, 17)일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면

α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$ 의 두 실근이다.

$2x^2 + (a - 5)x + 12 - b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{a-5}{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 선분 PQ의 중점의 x 좌표가 3이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3 \text{에서 } \alpha + \beta = 6 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{a-5}{2} = 6$$

$$\therefore a = -7$$

또, 점 (3, 17)은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b \quad \therefore$

$$b = 2$$

$$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$$

48. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 해는?

① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

② $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

③ $x = \frac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

④ $x = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = A \text{라 하자.}$$

$$A^2 + 8A + 15 = (A + 3)(A + 5)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right) = 0$$

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

49. 오차방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

$\therefore x+1=0$ 또는

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

(i) $x+1=0$ 에서 $x=-1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

$$= 0\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

이 때, $x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$$\textcircled{1} x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 일 때, } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\textcircled{2} x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 일 때, } x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이므로

두 허근 α, β 의 합은

$\alpha + \beta = 1$ 이다.

50. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 를 t 로 치환하면

$\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 는 3이 된다.

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

51. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α , 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$

② $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③ $1 - \sqrt{5}$

④ $2 - \sqrt{5}$

⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{라 하면}$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2, 3$$

i) $t = 2$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

ii) $t = 3$ 일 때

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

52. 다음 세 조건을 만족하는 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 은 몇 개 존재하는가?

- (가) a, b, c, d 는 100 이하의 서로 다른 자연수이다.
 (나) c, d 는 양의 약수를 3 개만 갖는 자연수이다.
 (다) c, d 는 방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이다.

① 1 가지

② 2 가지

③ 3 가지

④ 4 가지

⑤ 5 가지

해설

양의 약수가 홀수 개인 자연수는 완전제곱수이다.

1 이 아닌 어떤 수 a^2 에 대하여

약수는 일단 1, a^2 , a 의 세 개가 있는데

더 이상의 약수가 존재하지 않으면 a 는 소수이다.

즉 c, d 는 소수의 제곱수로 100 이하이므로

$2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 네 가지 중에 있다.

조건 (다)에서 $a = c + d, b = cd$ 이고

a, b 는 100 이하의 자연수이므로

$$\begin{cases} a = 2^2 + 3^2 \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2^2 + 5^2 \\ b = 2^2 \cdot 5^2 \end{cases} \quad \text{의 두 가지}$$

53. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha + 1, \beta + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2 - 3x + 2 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 + 3x - 4 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 + 2x - 3 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = 4,$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 6$$

$\therefore \alpha + 1, \beta + 1$ 을 근으로 하는 방정식은

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

54. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 6x + 4 = 0$

② $x^2 - 3x + 4 = 0$

③ $x^2 + 6x + 5 = 0$

④ $x^2 + 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 5 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

두 근의 합 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + 3 = 6$$

두 근의 곱 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = 4$$

$\therefore$ 방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$

55. a, b, c 는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$ 의 해가 α, β 일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$ 의 해를 구하면?

① α, β

② $-\alpha, -\beta$

③ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$

⑤ $\alpha, -\beta$

해설

$$\alpha + \beta = \frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$cx^2 - bx + a = 0 \text{에서}$$

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$ 의 양변을 $x^2 (\neq 0)$ 으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\frac{1}{x} = t$ 라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } \frac{1}{\beta}$$

$\therefore cx^2 - bx + a = 0$ 의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$ 이다.

56. 방정식 $x^5 - 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$ 의 값은?

① -5

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

$$x^5 - 1$$

$= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ 이므로

α 는 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이다.

$\alpha^5 = 1$ 이면 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = 1$ 이므로

$\frac{1}{\alpha}$ 도 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이다.

따라서, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0$

$\therefore 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$

$= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) +$

$\frac{1}{\alpha^5} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \cdots$

$+ \frac{1}{\alpha^{2005}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right)$

$= 0$

57. 삼차방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 $f(n) = \frac{\omega^{2n}}{1 + \omega^n}$ 으로 정의하자. 이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ $-\frac{9}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ 0

해설

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$n = 3\alpha, 3\alpha + 1, 3\alpha + 2 \text{라 하자}$$

i) $n = 3\alpha$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{\omega^{2n}}{1 + \omega^n} \\ &= \frac{(\omega^3)^{2\alpha}}{1 + (\omega^3)^\alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ii) $n = 3\alpha + 1$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(\omega^3)^{2\alpha} \times \omega^2}{1 + (\omega^3)^\alpha \times \omega} \\ &= \frac{\omega^2}{\omega + 1} \\ &= \frac{\omega^2}{-\omega^2} = -1 \end{aligned}$$

iii) $n = 3\alpha + 2$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(\omega^3)^{2\alpha} \times \omega^4}{1 + \omega^{3\alpha} \times \omega^2} \\ &= \frac{\omega^4}{1 + \omega^2} = \frac{\omega}{-\omega} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$$

$$= (-1 + -1 + \frac{1}{2}) + (-1 + -1 + \frac{1}{2}) + (-1 + -1)$$

$$= -5$$

58. 삼차 방정식의 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 하고, 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{w^n}{1 + w^{2n}}$ 이라 할 때, $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow w^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$f(3n) = \frac{w^{3n}}{1 + w^{6n}} = \frac{(w^3)^n}{1 + (w^3)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$f(3n+1) = \frac{w^{3n+1}}{1 + w^{6n+2}} = \frac{w}{1 + w^2} = -1$$

$$f(3n+2) = \frac{w^{3n+2}}{1 + w^{6n+4}} = \frac{w^2}{1 + w} = -1$$

즉 $-1, -1, \frac{1}{2}$ 가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로
순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= (-1) - (-1) + \frac{1}{2} - (-1) + \cdots + f(19)$$

$$= 0 + f(19) = -1$$

59. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$