

1. x 에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$$

A , B 의 최대공약수는 $A - B$ 의 인수이므로

A , B 의 최대공약수를 G 라 하면

G 는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$ 는 A 의 인수이어야 하므로

$$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 0$ 이므로 $k = 2$

2. x 에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, pq 의 값을 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + px^2 - q^2$,
 $q(x) = x^3 - (3q - p)x + 2(q - 1)$ 라 놓으면
최대공약수가 $x - 1$ 이므로
 $f(1) = 1 + p - q^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $g(1) = 1 - (3q - p) + 2(q - 1) = 0$ 에서
 $p - q - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $q^2 - q - 2 = 0, (q - 2)(q + 1) = 0$
(i) $q = 2$ 일 때, $\textcircled{2} p = 3$
 $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2, g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
 $\therefore G.C.D$ 가 $x - 1$ 이라는 것에 모순
(ii) $q = -1$ 일 때, $\textcircled{2} p = 0$
 $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1),$
 $g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$
 $\therefore G.C.D$ 는 $x - 1$
 $\therefore pq = 0$

3. x 에 대한 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 + bx$ 와 $B = x^2 + bx + a$ 의 최대공약수가 일차식이다. 그 최대공약수를 구하면? (단, a, b 는 상수이고 $ab \neq 0$)

① $x - 1$ ② $x - 2$ ③ $x + 1$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 3$

해설

$$A(x) = x(x^2 + ax + b), B(x) = x^2 + bx + a$$

인수를 $(x - p)$ 로 놓으면

$$A(p) = 0 \text{에서 } p^3 + ap^2 + bp = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$B(p) = 0 \text{에서 } p^2 + bp + a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times p \text{에서 } (a - b)p^2 + (b - a)p = 0$$

$$\therefore (a - b)p(p - 1) = 0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $p \neq 0$

$$\therefore p = 1$$

따라서 최대공약수는 $x - 1$

4. 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x + 2$ 이고 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 + ax + 6$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 0

② 1

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

최대공약수 $G = x + 2$

최소공배수는 G 를 인수로 가지므로

$x = -2$ 를 최소공배수에 대입하면 0이 된다.

$$x^3 + 2x^2 + ax + 6$$

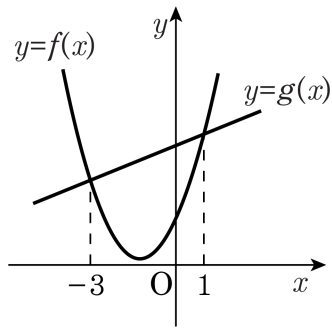
$$= (-2)^3 + 2(-2)^2 + a(-2) + 6$$

$$= -8 + 8 - 2a + 6$$

$$= -2a + 6 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

5. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



- ① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$$2x^2 + ax + 4 = cx + d \\ \Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d = 0 \cdots \textcircled{1}$$

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x + 3)(x - 1) = 0$ 과 일치한다.

$\textcircled{1}$ 과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\therefore f(x) - g(x) = 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ = 2x^2 + 4x - 6 \\ = 2(x + 1)^2 - 8$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

6. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a - 3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
 $y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$
 $\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12$
 $\qquad\qquad\qquad = 3 \cdot 2 - 12$
 $\qquad\qquad\qquad = -6$

7. 함수 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

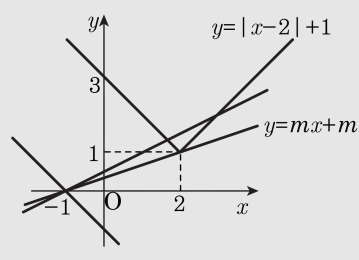
해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x - 2| = x - 2$ 이므로

$$y = x - 2 + 1 = x - 1$$

$x < 2$ 일 때, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = -x + 2 + 1 = -x + 3$

따라서, $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx + m = m(x + 1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx + m$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m + m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx + m$ 이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행할 때, $m = -1$

따라서, 직선 $y = mx + m$ 이 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프와 만나려면

가울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$

이다.

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x - 3 = m(x + 2)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y = x^2 = 2x - 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = m(x + 2) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

이라 하면 직선 $\textcircled{2}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.

이 때, 교점의 x 좌표가 1 과 2 사이에 존재해야 하므로

(i) 직선 $\textcircled{2}$ 이

점 $(1, 0)$ 을 지날 때

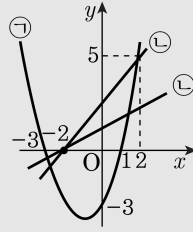
$$3m = 0 \quad \therefore m = 0$$

(ii) 직선 $\textcircled{2}$ 이 점 $(2, 5)$ 를 지날 때

$$4m = 5 \quad \therefore m = \frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 $0 < m < \frac{5}{4}$

따라서, 정수 m 의 값은 1 하나뿐이다.



9. 방정식 $x^5 - 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$ 의 값은?

- ① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^5 - 1 \\ &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \text{ 이므로} \\ & \alpha \text{는 } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \text{의 근이다.} \\ & \alpha^5 = 1 \text{ 이면 } \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = 1 \text{ 이므로} \\ & \frac{1}{\alpha} \text{도 } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \text{의 근이다.} \\ & \text{따라서, } 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0 \\ & \therefore 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \\ & \frac{1}{\alpha^5} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{\alpha^{2005}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

10. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{-2n} + w^{-n} + 1$ 의 값들의 합을 구하면?
(단, n : 양의 정수)

- ① 0
- ② 3
- ③ 4
- ④ 1
- ⑤ -1

해설

$w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$ 이므로
(i) $n = 3k$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} + (w^3)^{-k} + 1 = 3$
(ii) $n = 3k + 1$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-2} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-1} + 1$
 $= \frac{w}{w^3} + \frac{w^2}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$
(iii) $n = 3k + 2$ 일 때
(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-4} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-2} + 1$
 $= \frac{w^2}{w^6} + \frac{w}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$
 $\therefore n = 3k$ 이면 3, $n \neq 3k$ 이면 0
 $\therefore$ 준식의 값들의 합은 3

11. 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$
- ② $\alpha^4 = 1$
- ③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1 = 1$
- ④ α 는 실수가 아니다.
- ⑤ α^3 은 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이다.

해설

① α 가 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이므로,
 $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha^4 - 1$
 $= (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$ 이므로
 $\alpha^4 = 1$

③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1$
 $= (\alpha^4)^{25} + (\alpha^4)^{12} \cdot \alpha^2 + (\alpha^4)^6 \cdot \alpha + (\alpha^4)^3 \cdot \alpha^3 + 1$
 $= 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + 1 = 1$

④ $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1) = 0$ 에서
 $x = -1$ 이라는 실근이 존재하므로
 α 는 실수일 수 있다.

⑤ $x = \alpha^3$ 을 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 에 대입하면,
 $\alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1$
 $= (\alpha^4)^2 \cdot \alpha + \alpha^4 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 + 1$
 $= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + 1 = 0$
($\because \alpha^4 = 1$)

12. α, β 를 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이라 하고 $P(n) = \alpha^n + \beta^n$ 라 할 때, $P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= 0, \\(x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \\ \therefore \alpha^3 &= 1, \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ \text{따라서 } n \geq 2 \text{인 모든 정수에 대해} \\ \alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} &= 0 \text{이고,} \\ \beta \text{에 대해서도 마찬가지로} \\ P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2) \\ &= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n) \\ &\quad + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \\ &= (1 + 1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}) \\ &\quad + (\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2}) \\ &= 2 + 0 + 0 = 2\end{aligned}$$