

1. x 에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$$

A , B 의 최대공약수는 $A - B$ 의 인수이므로

A , B 의 최대공약수를 G 라 하면

G 는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$ 는 A 의 인수이어야 하므로

$$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 0$ 이므로 $k = 2$

2. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

- ① $(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$ ② $(x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$
③ $(x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$ ④ $(x - 1)(x + 4)^2(x + 2)$
⑤ $(x - 1)(x + 4)(x + 2)^2$

해설

인수정리에 의해

$$f(1) = 1 - a + b = 0$$

$$g(1) = 1 + a - 2b = 0$$

연립하면, $a = 3, b = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

조립제법을 이용하면,

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$\therefore \text{최소공배수: } (x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$$

3. 두 다항식 $f(x) = x^2 + x + a$, $g(x) = 2x^2 + bx - 1$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 구하면?

① $(x - 1)(x - 2)(2x - 1)$

② $(x - 1)(x + 1)(2x - 1)$

③ $(x - 1)(x + 2)(2x + 1)$

④ $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$

⑤ $(x - 1)(x + 2)(x - 2)$

해설

$$f(1) = 0, 1 + 1 + 0 = a \therefore a = -2$$

$$g(1) = 0, 2 + b - 1 = 0 \therefore b = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$g(x) = 2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$$

$$\therefore \text{최소공배수} : (x - 1)(x + 2)(2x + 1)$$

4. 두 다항식 $x^2 + ax - 2$, $x^2 - 5x + b$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

각 식에 $x = 2$ 을 대입하면 0이 된다.

i) $x^2 + ax - 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 + 2a - 2 = 0 \therefore a = -1$$

ii) $x^2 - 5x + b$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 - 10 + b = 0 \therefore b = 6$$

$$\therefore a + b = -1 + 6 = 5$$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \dots \textcircled{A}$
 $4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{B}$ 식 $+2 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$
 $\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$
 $\textcircled{A}$: $3x = y$ 를 $\textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7x^2 = 7 \quad x = 1(x > 0), \quad y = 3$
 $\therefore x + y = 4$
 $\textcircled{A}$: $2x = 3y$ 를 $4 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, y = 2(y > 0), x = 3$
 $\therefore x + y = 5$
 $a > b$ 이므로 $a = 5, b = 4$
 $\therefore a - b = 1$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① - ② $\times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y, x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$ 불능

$$\text{ii) } x = -2y \text{ 일 때 } 4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x = \alpha, y = \beta \text{라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

8. $x = \alpha, y = \beta$ 가 연립방정식
- $$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases}$$
의 해일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?
- ① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots ① \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①×3 - ②×2하면
 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$
 $x = 2y$ or $x = y$
 $x = 2y$ 를 ① 식에 대입하면
 $4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2$ 불능
 $x = y$ 를 ①식에 대입하면
 $y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$
 $y^2 = 1, y = \pm 1, x = \pm 1$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$

9. 방정식 $x^5 - 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$ 의 값은?

- ① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^5 - 1 \\ &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \text{ 이므로} \\ & \alpha \text{는 } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \text{의 근이다.} \\ & \alpha^5 = 1 \text{ 이면 } \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = 1 \text{ 이므로} \\ & \frac{1}{\alpha} \text{도 } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \text{의 근이다.} \\ & \text{따라서, } 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0 \\ & \therefore 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \\ & \frac{1}{\alpha^5} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{\alpha^{2005}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

10. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + 3w^4 - 2w^5$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -4

해설

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일 때
 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로
 $1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 \cdot 1 + 3\omega^3 \cdot \omega - 2\omega^3 \cdot \omega^2$
 $= 1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 + 3\omega - 2\omega^2$
 $= \omega^2 + \omega + 1 - 4 = -4$
 $\therefore -4$

11. 삼차 방정식의 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 하고, 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{w^n}{1 + w^{2n}}$ 이라 할 때, $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow w^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$f(3n) = \frac{w^{3n}}{1 + w^{6n}} = \frac{(w^3)^n}{1 + (w^3)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$f(3n + 1) = \frac{w^{3n+1}}{1 + w^{6n+2}} = \frac{w}{1 + w^2} = -1$$

$$f(3n + 2) = \frac{w^{3n+2}}{1 + w^{6n+4}} = \frac{w^2}{1 + w} = -1$$

즉 $-1, -1, \frac{1}{2}$ 가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= (-1) - (-1) + \frac{1}{2} - (-1) + \cdots + f(19)$$

$$= 0 + f(19) = -1$$

12. 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ -2

해설

한 근이 α 이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$,
양변에 $\alpha - 1$ 를 곱하면,
 $\alpha^3 - 1 = 0$, $\therefore \alpha^3 = 1$
 $\therefore \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
 $= \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 1) + \alpha^2 + \alpha + 1$
 $= 0$