1. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면
$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$
$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로
$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$
$\therefore\ a=b=2,\ c=4$
$\therefore\ abc=16$

2. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$
④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$
\begin{aligned}
a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\
&= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\
&= (a - b)(a + b)(a + c)
\end{aligned}
$$

3. $(a-b+c)(a+b-c)$ 를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$
④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

4. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

5. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$　② $2+i$　③ $2+2i$
④ $1-i$　⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로
$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$
$= (a+b) + (-3a+b)i = 3-5i$
따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면
$a=2$, $b=1$
따라서 $z=2+i$ 이다.

6. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

7. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4 를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x-1)^2$ ② $y = 2(x-1)^2 + 4$

③ $y = 2(x+1)^2 + 4$ ④ $y = -2(x+1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x-1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x+1)^2 + 4$

8. x의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

9. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \quad (\text{분배})\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \quad (\text{분배})\\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합})\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

10. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,\ x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1,\ x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0,\ a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

11. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x-1$, 나머지가 $-7x-2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x-1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x-1)$
좌변을 $2x-1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x-1)(x^2-3x+2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

12. x^4 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R_1 이라 하자. R_1 을 구하고, 이 때, $Q(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫 $Q_1(x)$ 을 구하면?

① $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x-\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{4})$
② $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x+\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{4})$
③ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x^2-\frac{1}{4})$
④ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = x^2+\frac{1}{4}$
⑤ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = x+\frac{1}{2}$

해설

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right) Q_1(x) + R_1$

(1) 양변에 $x=-\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = R_1 \quad \therefore\ R_1 = \frac{1}{16}$

(2) $x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right) Q_1(x) + \frac{1}{16}$ 이므로

$x^4 - \frac{1}{16} = \left(x+\frac{1}{2}\right) Q_1(x)$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right) Q_1(x)$

$Q_1(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

$\therefore$ 구하는 몫은 $x^2+\frac{1}{4}$

13. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$　　② $2x - y + 2$　　③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$　　⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y+4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2)$

$= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

14. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \text{ (단, } a \neq b \neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$(\text{준 식}) = \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

15. x에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$

A, B의 최대공약수는 $A - B$의 인수이므로

A, B의 최대공약수를 G라 하면

G는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$는 A의 인수이어야 하므로

$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$

$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 2$이므로 $k = 2$

16. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $x^3-6x^2+3x+10$일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1이다.)

① $2x^2-6x+8$ ② $2x^2-6x+7$ ③ $2x^2-8x+8$
④ $2x^2-9x+10$ ⑤ $2x^2+6x+9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이므로
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수 $(x-2)ab = x^3-6x^2+3x+10$
$= (x-2)(x+1)(x-5)$
그러므로 $a = x-5, b = x+1$
또는 $a = x+1, b = x-5$
따라서 두 다항식은
$(x-2)(x-5) = x^2-7x+10,$
$(x-2)(x+1) = x^2-x-2$
$\therefore$두 다항식의 합은 $2x^2-8x+8$

17. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

18. $\alpha = -2 + i$, $\beta = 1 - 2i$ 일 때 $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 10　　⑤ 20

해설

$$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$$
$$= \alpha(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \beta(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$$
$$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$$
$$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$$
$$= (-1 - i)(-1 + i)$$
$$= 2$$

19. $a<0,\ b<0$ 일 때 다음 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$　　④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

해설

$a<0,\ b<0$ 이므로,

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}i\sqrt{-b}i$

$=\sqrt{-a}\sqrt{-b}i^2$

$=-\sqrt{-a}\sqrt{-b}$

$=-\sqrt{ab}$

$(\because -a>0,\ -b>0)$

따라서, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot(ab)}$

$=\sqrt{a^2}\sqrt{ab}$

$=|a|\sqrt{ab}$

$=-a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a}}=-\dfrac{b}{\sqrt{a}}=-\dfrac{b\sqrt{a}}{|a|}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

20. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$
$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$
$x^2+6x=X$ 로 놓으면
$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$
$X(X+8)+15=0,$
$X^2+8X+15=0$
$(X+3)(X+5)=0$
$\therefore\ X=-3, X=-5$
㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$
$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$
㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$
$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

21. 방정식 $(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$에서
$x^2+x+2=A$라 하면
$A^2=A+2$,
$A^2-A-2=0,\ (A+1)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-1$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x+2=-1$일 때, $x^2+x+3=0$
(ii) $x^2+x+2=2$일 때, $x^2+x=0$
(i), (ii)에서 α, β는 허근이므로 $x^2+x+3=0$의 근이 된다.
따라서, $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=3$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times3=-5$

22. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면
$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로
$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

23. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

24. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$
$=1-2+4+3=6$

25. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a>b$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠

$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡

㉡ 식+2×㉠식에 대입하면

$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \ (3x-y)(2x-3y) = 0$

$\therefore\ 3x = y \ \ or \ \ 2x = 3y$

㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면

$7x^2 = 7 \ x = 1(x>0), \quad y = 3$

$\therefore\ x + y = 4$

㉯: $2x = 3y$를 $4\times$㉠식에 대입하면

$7y^2 = 28, \ \ y^2 = 4, y = 2(y>0), x = 3$

$\therefore\ x + y = 5$

$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$

$\therefore\ a - b = 1$

26. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_8x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡

㉠ – ㉡ : $26 = 2\left(a_1 + a_3 + a_5 + a_7\right)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

27. $x-1$로 나누면 나머지가 3, $x-2$로 나누면 나머지가 7, $x-3$으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$라 할 때, $f(-3)$의 값은?

① 7 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$

$f(1)=a+b+c=3$ ⋯⋯①

$f(2)=4a+2b+c=7$ ⋯⋯②

$f(3)=9a+3b+c=13$ ⋯⋯③

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1,\ c=1$

$f(x)$ 가 가장 낮은 차수가 되려면 $k=0$

$\therefore f(x)=x^2+x+1,$

$f(-3)=(-3)^2+(-3)+1=7$

28. 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 $a,\ b$라 할 때 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}$의 값은?

① 4　② 1　③ $\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 6

해설

$x^2-4x+1=0$에서 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1=3>0$ 이므로

$a,\ b$ 는 서로 다른 실수이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=4,\ ab=1$ 이므로 $a>0,\ b>0$

$a,\ b$를 식에 대입하면

$a^2-4a+1=0,\ b^2-4b+1=0$

$\therefore a^2+1=4a,\ b^2+1=4b$

$\therefore \sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}=\sqrt{4a}+\sqrt{4b}$

$=2(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\because a>0,\ b>0)$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$

$=6(\because a+b=4, ab=1)$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{6}$

29. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2　② $\frac{5}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면

다른 한 근은 $\frac{1}{a}$이다.

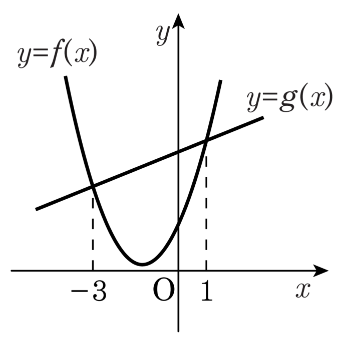
$\therefore\ a+\frac{1}{a}=k^2=\frac{2k+5}{3}$

$\therefore\ 3k^2-2k-5=0$

$k=\frac{5}{3}$ 또는 -1

$\therefore$ 양수 $k=\frac{5}{3}$

30. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$\therefore f(x) - g(x) = 2x^2 + (a-c)x + 4 - d$

$= 2x^2 + 4x - 6$

$= 2(x+1)^2 - 8$

$\therefore$ 최솟값 : -8

31. 사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}=a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4-x^3-4x^2-x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2-x-4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$
$x+\frac{1}{x}=a$로 치환하면
$a^2-a-6=0$, $(a-3)(a+2)=0$
$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-2$
따라서, 모든 A의 값의 합은 $3+(-2)=1$

32. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$의 해는?

① $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
② $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
③ $x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
④ $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2 + 8x + 17 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 17 = 0$

$\therefore x + \dfrac{1}{x} = A$라 하자.

$A^2 + 8A + 15 = (A+3)(A+5)$

$= \left(x + \dfrac{1}{x} + 3\right)\left(x + \dfrac{1}{x} + 5\right) = 0$

$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$

$\therefore x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

33. 다음 세 조건을 만족하는 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$은 몇 개 존재하는가?

> (가) a, b, c, d는 100이하의 서로 다른 자연수이다.
> (나) c, d는 양의 약수를 3개만 갖는 자연수이다.
> (다) c, d는 방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 두 근이다.

① 1가지　② 2가지　③ 3가지
④ 4가지　⑤ 5가지

해설

양의 약수가 홀수 개인 자연수는 완전제곱수이다.
1이 아닌 어떤 수 a^2에 대하여
약수는 일단 1, a^2, a의 세 개가 있는데
더 이상의 약수가 존재하지 않으면 a는 소수이다.
즉 c, d는 소수의 제곱수로 100이하이므로
2^2, 3^2, 5^2, 7^2의 네 가지 중에 있다.
조건 (다)에서 $a = c + d$, $b = cd$이고
a, b는 100이하의 자연수이므로

$$\begin{cases} a = 2^2 + 3^2 \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2^2 + 5^2 \\ b = 2^2 \cdot 5^2 \end{cases}$$ 의 두 가지

34. 방정식 $x^5 - 1 = 0$의 한 허근을 α라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$의 값은?

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$x^5 - 1$
$= (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$이므로
α는 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$의 근이다.

$\alpha^5 = 1$이면 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = 1$이므로

$\frac{1}{\alpha}$도 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$의 근이다.

따라서, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0$

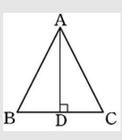
$\therefore\ 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$
$= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) +$
$\frac{1}{\alpha^5}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \cdots$
$+ \frac{1}{\alpha^{2005}}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right)$
$= 0$

35. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 꼭지점 A 에서 변 BC 에 그은 수선의 발을 D 라 하자. 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는 높이 AD 의 길이의 4 배이다. 이 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$　　② $\dfrac{5}{3}$　　③ 2

④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{3}$　　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{9}}{3}$

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = a,\quad \overline{\mathrm{BC}} = 2b,\quad \overline{\mathrm{AD}} = h$ 라 놓으면

$2a + 2b = 4h \cdots\cdots (\mathrm{i})$

$a^2 = b^2 + h^2 \cdots\cdots (\mathrm{ii})$

(i) 에서 $h = \dfrac{a+b}{2}$ 를 (ii) 에 대입하여 정리하면

$3a^2 - 2ab - 5b^2 = 0 \cdots\cdots (\mathrm{iii})$

(iii) 식의 양변을 b^2 으로 나누고

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}} = \dfrac{a}{b} = x$ 라 놓으면

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$\therefore (x+1)(3x-5) = 0$

$\therefore x = \dfrac{5}{3} (\because x > 0)$