1. $\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \leq \beta$ 일 때,
 $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 3x \leq 0$ 에서
 $x(x - 3) \leq 0$ 이므로
 $0 \leq x \leq 3 \cdots (가)$
 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서
 $(x - 1)(x - 4) < 0$ 이므로
 $1 < x < 4 \cdots (나)$
(가), (나) 에 의해
 $1 < x \leq 3$ 이므로
 $\alpha = 1, \beta = 3$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

2. 두 부등식 $2x-1 > 0$, $(x+1)(x-a) < 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위가 $\frac{1}{2} < x < 3$ 이 되도록 하는 정수 a 의 값은? (단, $a > 1$)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$2x-1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$(x+1)(x-a) < 0$$

$$\therefore -1 < x < a \dots \textcircled{2}$$

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2} < x < 3$ 이므로

$$\therefore a = 3$$

3. 부등식 $|x^2 - 4x - 6| \leq 6$ 의 해를 구하면?

① $-2 \leq x < 6$

② $0 \leq x \leq 4$

③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 6$

④ $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $4 \leq x \leq 6$

⑤ $x \leq 0$ 또는 $x \geq 4$

해설

$$|x^2 - 4x - 6| \leq 6 \text{에서}$$

$$\frac{-6 < x^2 - 4x - 6 \leq 6}{\text{㉠} \quad \text{㉡}}$$

$$\text{㉠에서 } x^2 - 4x \geq 0, x(x-4) \geq 0 \\ \therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 4$$

$$\text{㉡에서 } x^2 - 4x - 12 \leq 0, (x+2)(x-6) \leq 0 \\ \therefore -2 \leq x \leq 6$$

따라서 공통 범위를 구하면
 $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $4 \leq x \leq 6$

4. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$\begin{aligned}y &= x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 \\y &= x + 1\end{aligned}$$

또

물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

- ① $m < -2, m > \frac{2}{3}$ ② $m < -1, m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2, m > 2$ ④ $m < 2, m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5, m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식

$$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$$

$$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$$

$$(3m-2)(m+2) > 0$$

$$\therefore m < -2, m > \frac{2}{3}$$

5. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + ay + b > 0$ 이 성립할 a, b 의 조건은? (단, a, b 는 실수)

- ① $a = 1, b > 2$ ② $a = 1, b < 2$ ③ $a = 2, b > 1$
④ $a = 2, b \geq 1$ ⑤ $a = 2, b \leq 1$

해설

준식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $x^2 + 2(1+y)x + y^2 + ay + b > 0$ 이고
임의의 실수 x 에 대하여 항상 성립하기 위해서는

$D/4 < 0$ 를 만족해야 한다.

$$D/4 = (1+y)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$$

$$\therefore (2-a)y + 1 - b < 0 \dots \textcircled{1}$$

①식이 모든 실수 y 에 성립할 조건은

$$(2-a) = 0, \quad 1 - b < 0,$$

$$\therefore a = 2, \quad b > 1$$