1. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2-3x \le 0$ 에서
$x(x-3) \le 0$ 이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎
$x^2-5x+4<0$ 에서
$(x-1)(x-4)<0$ 이므로
$1 < x < 4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1 < x \le 3$ 이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

2. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

3. 부등식 $|x^2-4x-6| \le 6$의 해를 구하면?

① $-2 \le x < 6$

② $0 \le x \le 4$

③ $x \le -2$또는$x \ge 6$

④ $-2 \le x \le 0$또는$4 \le x \le 6$

⑤ $x \le 0$또는$x \ge 4$

해설

$|x^2-4x-6| \le 6$에서

$$-6 < x^2-4x-6 \le 6$$

㉠ ㉡

㉠에서 $x^2-4x \ge 0,\ x(x-4) \ge 0$

$\therefore x \le 0$또는$x \ge 4$

㉡에서 $x^2-4x-12 \le 0,\ (x+2)(x-6) \le 0$

$\therefore -2 \le x \le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-2 \le x \le 0$ 또는 $4 \le x \le 6$

4. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

① $m < -2, \quad m > \frac{2}{3}$
② $m < -1, \quad m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2, \quad m > 2$
④ $m < 2, \quad m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5, \quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$
$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore \quad m < -2 \, , \, m > \frac{2}{3}$

5. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1, \quad b>2$ ② $a=1, \quad b<2$ ③ $a=2, \quad b>1$

④ $a=2, \quad b\geq 1$ ⑤ $a=2, \quad b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고

임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는

$D/4<0$를 만족해야 한다.

$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$

$\therefore (2-a)y+1-b<0 \cdots ①$

①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은

$(2-a)=0, \quad 1-b<0,$

$\therefore a=2, \quad b>1$