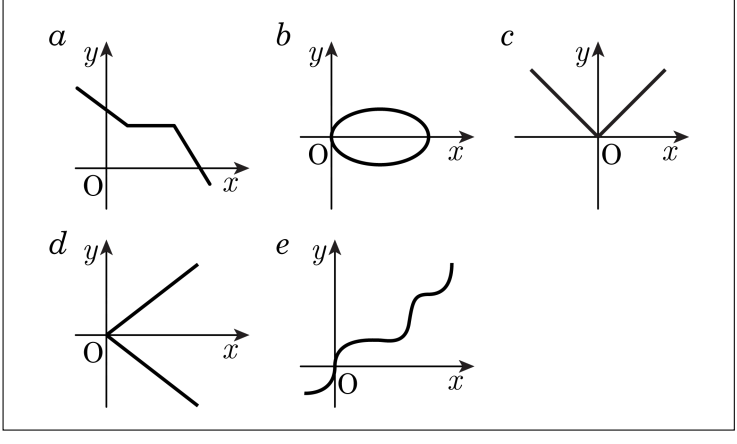


1. 다음 그래프 중 함수인 것은?

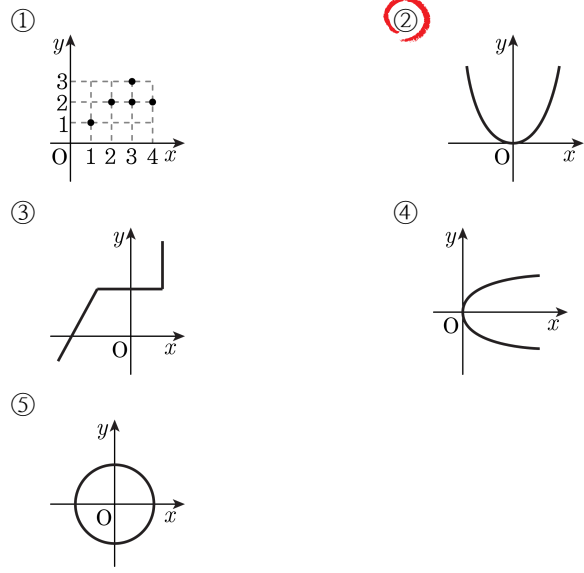


- ① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

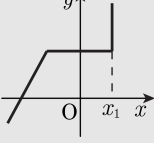
$[a]$ 함수 $[b]$ 함수가 아니다. $[c]$ 함수 $[d]$ 함수가 아니다. $[e]$ 함수 따라서 $[a], [c], [e]$ 만이 함수이다.

2. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

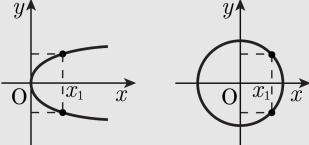


해설

X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.
① $f(3) = 2, f(3) = 3$ 이므로 함수가 아니다.
③ x_1 에 대응하는 y 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤ x_1 에 대응하는 y 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.



3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(4) = 4$
모든 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 이므로
 $g(x)$ 는 상수함수이다.
즉, $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

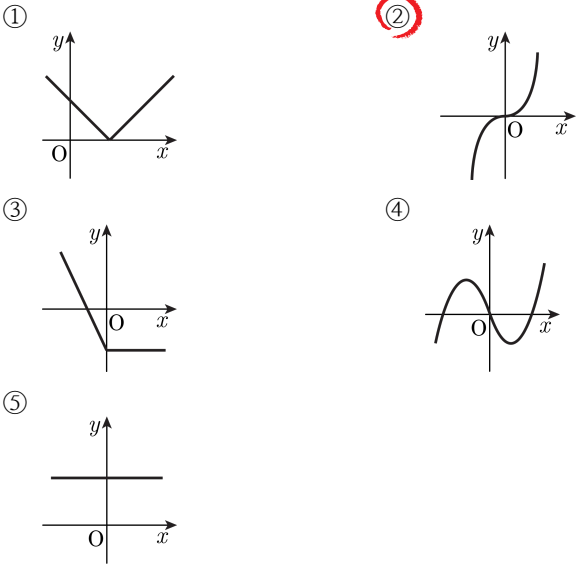
5. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$
 $(3, 2, 1)$ 이므로
 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

6. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?



해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

7. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

9. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

10. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4

② 3

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = I$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$

$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

11. 함수 $y = |x - 1| - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < m < 0$ ② $-\frac{1}{2} < m < 1$ ③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$
 ④ $0 < m < 1$ ⑤ $1 < m < 2$

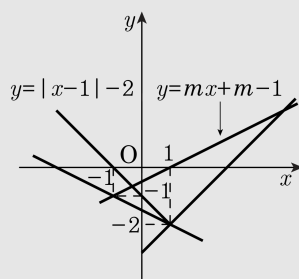
해설

$y = |x - 1| - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1, -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x + 1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

따라서, 두 그래프가 서로 다른 두

점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$



12. 함수 $y = -|x + 1| + 3$ 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

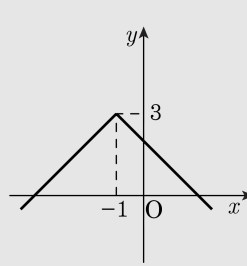
③ 3

④ 4

⑤ 5

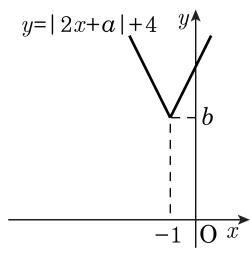
해설

$y = -|x + 1| + 3$ 의 그래프는 다음
그림과 같으므로 최댓값은
 $x = -1$ 일 때, 3이다.



13. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10



해설

$$y = |2x + a| + 4$$

$$= \left| 2 \left(x + \frac{a}{2} \right) \right| + 4$$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는
 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향
 으로

$-\frac{a}{2}$ 만큼,

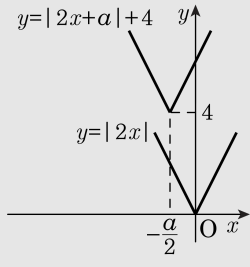
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} = -1, \quad b = 4$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 4 \quad \therefore ab = 8$$



14. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

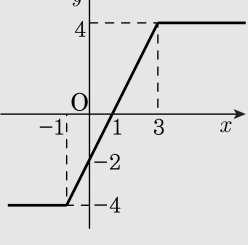
$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



15. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

16. 다음 중 우함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $y = x^4 - 3x^2$	㉡ $y = \frac{1}{x}$	㉢ $y = \sqrt{x^2 + 1}$
㉤ $y = 4x$	㉥ $y = \frac{3}{x^2}$	㉦ $y = x^3$

- ① ㉠, ㉡, ㉢
- ② ㉠, ㉢, ㉥
- ③ ㉠, ㉥, ㉦
- ④ ㉡, ㉢, ㉦
- ⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

우함수인 것은 $y = x^4 - 3x^2, y = \sqrt{x^2 + 1}, y = \frac{3}{x^2}$ 이고, 나머지는 모두 기함수이다.

17. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

18. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2$ ($\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

19. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$ 를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$$\frac{x+1}{5} = t \text{로 놓으면 } x = 5t - 1$$

$$f(t) = (5t - 1) + 2 = 5t + 1 \text{에서}$$

$$f(x) = 5x + 1$$

$$\therefore f(f(x)) = f(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1$$

$$= 25x + 6$$

$$\therefore f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$$

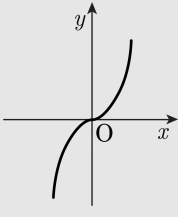
20. 삼차함수 $y = ax^3$ 의 그래프의 설명 중 틀린 것은?

- ① x 축에 대하여 대칭이다.
- ② 원점에 대하여 대칭이다.
- ③ $a > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
- ④ $|a|$ 가 크면 클수록 y 축에 가깝다.
- ⑤ $a < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

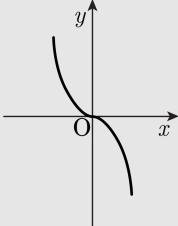
해설

$f(x) = ax^3$ 의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a > 0$



(ii) $a < 0$

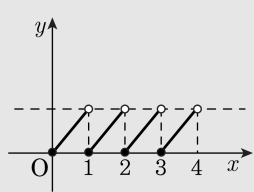


따라서 그래프는 x 축에 대하여 대칭이 아니다.

21. $y = x - [x] (0 \leq x \leq 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
([x]는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \leq x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \leq x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \leq x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \leq x < 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

22. $-4 \leq x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

i) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$$-2 \leq \frac{x}{2} < -1 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = -2$$

ii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$-1 \leq \frac{x}{2} < 0 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = -1$$

iii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$0 \leq \frac{x}{2} < 1 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = 0$$

iv) $2 \leq x < 4$ 일 때,

$$1 \leq \frac{x}{2} < 2 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = 1$$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4 개이다.

23. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

- ㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$
- ㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.
- ㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$
- ㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$ 따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4, f(x) \text{ 는 정수}\}$ 이다.
- ㉢ [반례] $x_1 = -1, x_2 = 3$ 일 때
 $f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
 $f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
 $x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.
이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

24. 두 함수 $y = |x - 1|$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x - 1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

The graph shows two functions on a Cartesian coordinate system. The function $y = |x - 1|$ is a V-shaped absolute value function with its vertex at (1, 0). The function $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ is a piecewise constant function (a step function) that increases in steps of 1 at every even integer value of x. The two graphs intersect at two points: (1, 0) and (4, 2). The intersection at (4, 2) is specifically highlighted with a solid dot on the step function and an open circle on the absolute value function.

따라서, $y = |x - 1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

25. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.

㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.

㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

26. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

- I. $f(0) \leq f(1)$
II. $f(2) \geq f(3)$
III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- < 보기 >
- $\textcircled{\tiny \neg}$ $f(2) = 1$

$\textcircled{\tiny \cup}$ $f(3) = 3f(1)$
- $\textcircled{\tiny \cap}$ $f(-1) > f(1)$

- $\textcircled{1} \textcircled{\tiny \neg}$

$\textcircled{2} \textcircled{\tiny \cup}$

$\textcircled{3} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}$
- $\textcircled{4} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cap}$

$\textcircled{5} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \cap}$

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 I, II를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \neg}$ 뿐이다.

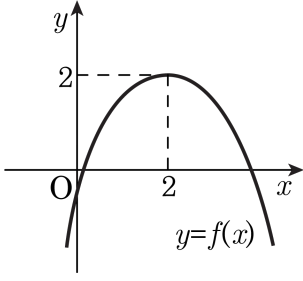
27. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

- ① -10
- ② -5
- ③ 1
- ④ 5
- ⑤ 11

해설

$f(x) = x - 1$
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$
 $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$
 $\vdots$
 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$
밑줄 그은 부분은 10개.
따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

28. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

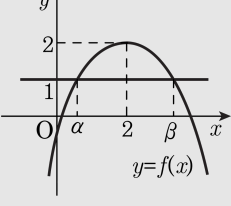


- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
 $f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만
 $f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

29. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$g^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x - 1) = -(3x - 1) + 2 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1) \\ &= (g^{-1} \circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1)) = 0 \end{aligned}$$

30. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로
 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$
 $((g \circ f) \circ g)(x) = (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x - 3)$
 $= g(f(x - 3))$
 $= g(2(x - 3) + 1) = g(2x - 5)$
 $= (2x - 5) - 3 = 2x - 8$
 $2x - 8 = ax + b$ 에서 $a = 2, b = -8$
 $\therefore a + b = -6$