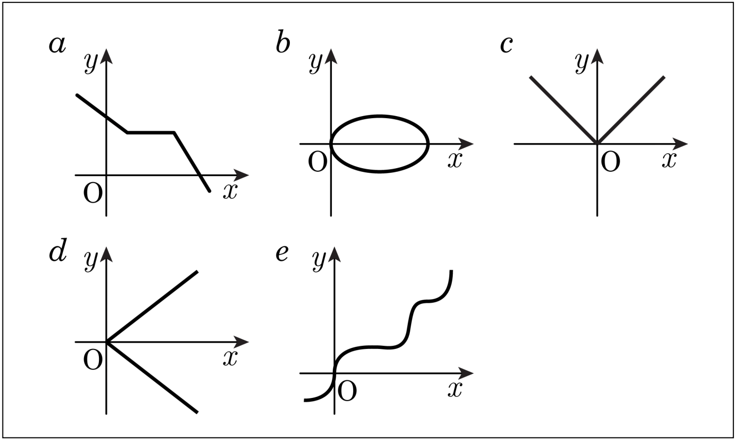
1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



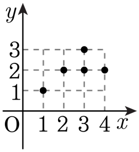
① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

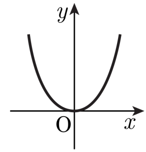
[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e]만이 함수이다.

2. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

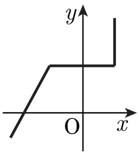
①



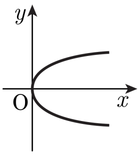
②



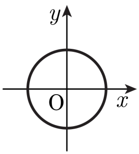
③



④



⑤

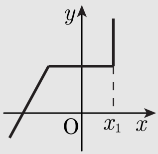


해설

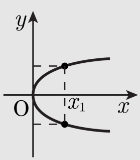
X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.

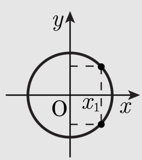
①$f(3) = 2$, $f(3) = 3$ 이므로 함수가 아니다.

③x_1 에 대응하는y 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤ x_1 에 대응하는 y 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.





3. 두 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{0,1,2,3,4\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$, $f(x)=|x-2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X로 하는 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(4) = 4$

모든 x 에 대하여 $g(x) = -2$ 이므로

$g(x)$ 는 상수함수이다.

즉, $g(-1) = -2$

$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

5. 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

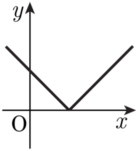
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

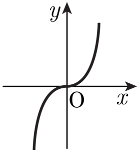
$a,\ b,\ c$ 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a),\ f(b),\ f(c))$ 으로 나타내면
$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),$
$(3,2,1)$ 이므로
X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6 개이다.

6. 다음 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?

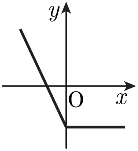
①



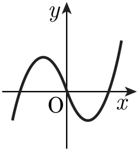
②



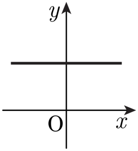
③



④



⑤



해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

7. 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $(f \circ g)(x)$를 구하면?

① $(f \circ g)(x)=(x+2)^2$

② $(f \circ g)(x)=x^2+2$

③ $(f \circ g)(x)=(x-2)^2$

④ $(f \circ g)(x)=x^2-2$

⑤ $(f \circ g)(x)=-x^2+2$

해설

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

9. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6$$
$$= 2ax + 4 \quad \cdots ㉠$$
$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1$$
$$= 2ax + 6a - 1 \quad \cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$

$4 = 6a - 1$

$\therefore \ a = \frac{5}{6}$

10. 함수 $f(x)=kx+1$ 에 대하여 $f^{-1}=f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은? (단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4　② 3　③ 2　④ -1　⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f\circ f=\mathrm{I}$

$(f\circ f)(x)=x$ 에서

$f(f(x))=f(kx+1)=k(kx+1)+1=k^2x+k+1=x$

$\therefore\ k^2=1,\ k+1=0$ 따라서 $k=-1$

11. 함수 $y=|x-1|-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m-1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

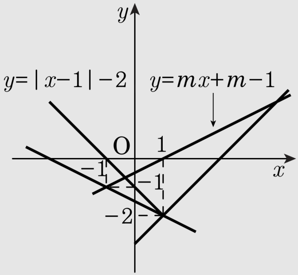
① $-1<m<0$ ② $-\frac{1}{2}<m<1$ ③ $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$

④ $0<m<1$ ⑤ $1<m<2$

해설

$y=|x-1|-2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺾인 그래프이다.

또, 직선 $y=mx+m-1$ 은 $y=m(x+1)-1$ 에서 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.



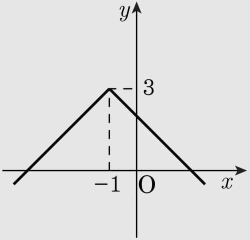
따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2}<m<1$

12. 함수 $y=-|x+1|+3$ 의 최댓값을 구하면?

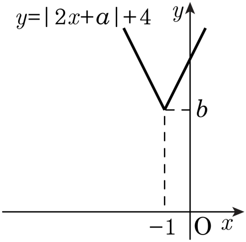
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=-|x+1|+3$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x=-1$ 일 때, 3이다.



13. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

해설

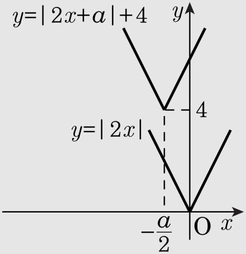
$y = |2x + a| + 4$

$= \left|2\left(x + \frac{a}{2}\right)\right| + 4$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-\frac{a}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.



이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$-\frac{a}{2} = -1,\ b = 4$

$\therefore\ a = 2,\ b = 4 \qquad \therefore\ ab = 8$

14. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

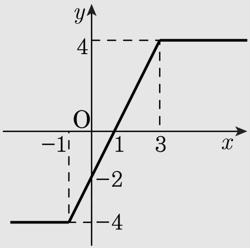
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

15. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$ ⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

16. 다음 중 우함수인 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ $y = x^4 - 3x^2$	㉡ $y = \dfrac{1}{x}$	㉢ $y = \sqrt{x^2+1}$
㉣ $y = 4x$	㉤ $y = \dfrac{3}{x^2}$	㉥ $y = x^3$

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉢, ㉤　③ ㉠, ㉤, ㉥

④ ㉡, ㉢, ㉥　⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

우함수인 것은 $y = x^4 - 3x^2$, $y = \sqrt{x^2+1}$, $y = \dfrac{3}{x^2}$ 이고, 나머지는 모두 기함수이다.

17. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

18. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ k\}$ 에서 집합 $Y = \{4,\ 7,\ a^4,\ a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4,\ f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times3+1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2+3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$

$a^2+3a-10 = 0,\ (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a+k = 2+5 = 7$

19. 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$\frac{x+1}{5} = t$ 로 놓으면 $x = 5t - 1$

$f(t) = (5t-1) + 2 = 5t + 1$ 에서

$f(x) = 5x + 1$

$$\therefore\ f(f(x)) = f(5x+1) = 5(5x+1) + 1$$
$$= 25x + 6$$
$$\therefore\ f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$$

20. 삼차함수 $y = ax^3$ 의 그래프의 설명 중 틀린 것은?

① x 축에 대하여 대칭이다.

② 원점에 대하여 대칭이다.

③ $a > 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

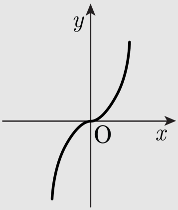
④ $|a|$ 가 크면 클수록 y 축에 가깝다.

⑤ $a < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

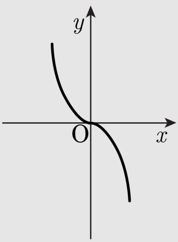
해설

$f(x) = ax^3$ 의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a > 0$



(ii) $a < 0$

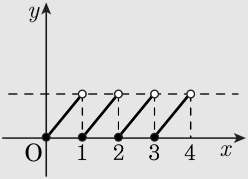


따라서 그래프는 x 축에 대하여 대칭이 아니다.

21. $y = x - [x](0 \le x \le 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ 4　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \le x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \le x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \le x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \le x \le 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

22. $-4 \leq x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

i) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$-2 \leq \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

ii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$-1 \leq \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$0 \leq \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

iv) $2 \leq x < 4$ 일 때,

$1 \leq \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

23. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$
따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4,\ f(x)$는 정수$\}$ 이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ 일 때
$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

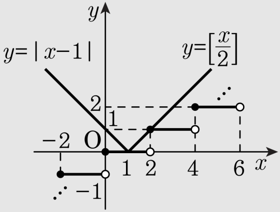
이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

24. 두 함수 $y=|x-1|$, $y=\left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y=|x-1|$ 과 $y=\left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y=|x-1|$ 과 $y=\left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

25. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수) 로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다. ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다. ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
$\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

26. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$
Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$
Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

ㄱ $f(2) = 1$ ㄴ $f(3) = 3f(1)$

ㄷ $f(-1) > f(1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

27. 함수 $f(x)=x-1$ 에 대하여 $(\underline{f \circ f \circ \cdots \circ f})(a)=1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10 ② -5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 11

해설

$f(x)=x-1$

$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x-1)=(x-1)-1=x-2$

$(f \circ f \circ f)(x)=f(f(f(x)))=f(x-2)=(x-2)-1=x-3$

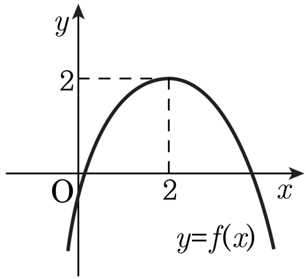
$\vdots$

$(\underline{f \circ f \circ \cdots \circ f})(x)=x-10$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a-10=1$ 에서 $a=11$

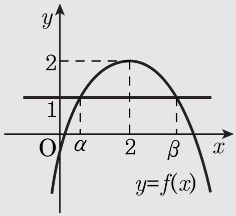
28. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

29. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=-x+2$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$g^{-1}(x)=-x+2$

$$g^{-1}(f(x))=g^{-1}(3x-1)=-(3x-1)+2$$
$$=-3x+3$$

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 이므로

$$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1)$$
$$=(g^{-1}\circ f)(1)$$
$$=g^{-1}(f(1))=0$$

30. 세 함수 $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x-3$, $h(x) = ax+b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$
\begin{aligned}
((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x-3) \\
&= g(f(x-3)) \\
&= g(2(x-3)+1) = g(2x-5) \\
&= (2x-5)-3 = 2x-8
\end{aligned}
$$

$2x-8 = ax+b$ 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a+b = -6$