1. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1) = x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① x^4+5x^2+1 ② x^4+x^2-3 ③ x^4-5x^2+1
④ x^4+x^2+3 ⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$
주어진 식에 대입하면
$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$
$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

2. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

(준식) $= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right)$

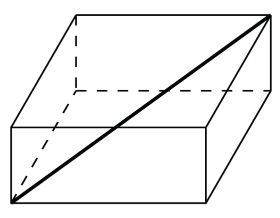
$= 4AB$

$= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n$

$= 4 \times 2^n$

$= 2^{n+2}$

3. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3 이고 겉넓이가 16, 부피가 6 인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3,\ abc = 6,\ 2(ab + bc + ca) = 16$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
$(a + b + c)^2 = 25,\ a + b + c = 5(\because a, b, c$는양수$)$
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\ \cdots$①
①에 각각 대입하면
$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$
$a^3 + b^3 + c^3 = 23$

4. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$
$49=21+2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=14$
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=(14)^2-2(8\times 7)$
$=84$

5. $a(a+1)=1$일 때, $\dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}$의 값은?

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$a(a+1)=1$에서

$a^2=-a+1$

$$\begin{aligned} a^4 &= (-a+1)^2 = a^2-2a+1 \\ &= (-a+1)-2a+1 = -3a+2 \\ a^6 &= a^4 \times a^2 = (-3a+2)(-a+1) \\ &= 3a^2-5a+2 = 3(-a+1)-5a+2 \\ &= -8a+5 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a^4-a^2}{a^6-1} = \frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1} = \frac{-2a+1}{-8a+4} = \frac{-2a+1}{4(-2a+1)} = \frac{1}{4}$$

6. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, x^5+y^5의 값을 구하면?

① 12　② 32　③ 52　④ 82　⑤ 102

해설

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\cdots(*)$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\therefore\ 14=8-6xy$

$\therefore\ xy=-1\cdots\cdots$①

$x^3+y^3=14\cdots\cdots$②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2(-1)=6\cdots\cdots$③

①, ②, ③을 $(*)$에 대입하면

$x^5+y^5=6\times14-2=82$