1. 방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2, -3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$　　② 3, 7, 5　　③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$　　⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2, -3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - r^2 = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 과 일치해야 하므로
$A = 4, B = 6, 13 - r^2 = 0$
$13 - r^2 = 0$ 에서
$r = \sqrt{13}$ $(\because r > 0)$
따라서, $A = 4, B = 6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

2. 두 점 $(2,\ 1)$, $(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y+1)^2=29$ ② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

③ $(x-2)^2+(y-1)^2=29$ ④ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

⑤ $x^2+y^2=4$

해설

원의 중심은 $\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 이고,

반지름은 $\frac{\sqrt{(2+3)^2+(1+1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$ 이다.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

3. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad\quad), k < (\quad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

4. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

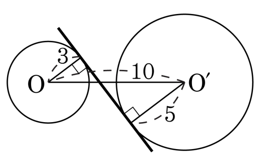
▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2-(3+5)^2}=6$

6. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.
> 직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식
> $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{(\text{가})} = 0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D = 0$ 에서
> $k = \pm \boxed{(\text{나})}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y = mx \pm \boxed{(\text{나})}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2 - k^2,\ r\sqrt{m^2 + 1}$
② $r^2 - k^2,\ r\sqrt{m^2 - 1}$
③ $k^2 - r^2,\ \sqrt{m^2 + 1}$
④ $k^2 - r^2,\ r\sqrt{m^2 + 1}$
⑤ $k^2 - r^2,\ r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에
대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$
$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$
원과 직선이 접하므로 $D = 0$,
즉$r^2(m^2 + 1) = k^2$, $k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
$\therefore$ (가) : $k^2 - r^2$, (나) : $r\sqrt{m^2 + 1}$

7. x 축에 접하고 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$　② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$　④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$ 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0 \quad \therefore \quad a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

8. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-5)^2+(y-4)^2=36$ 의 공통외접선의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 0 개

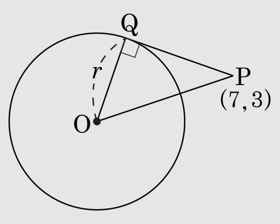
해설

두 원의 중심거리는
$\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}$
두 원의 반지름의 길이의 합이 8, 차가 4 로
$4<\sqrt{20}<8$ 이므로
두 원은 서로 두 점에서 만난다.
따라서 공통외접선 2 개를 가진다.

9. P(7, 3) 에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=15$ 에 그은 한 접선의 접점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하면?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 20

해설



$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2$$
$$= (6^2+2^2) - 15 = 25$$
$$\therefore\ \overline{PQ} = 5$$

10. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$

$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

11. 점 A(0, a)에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서
접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

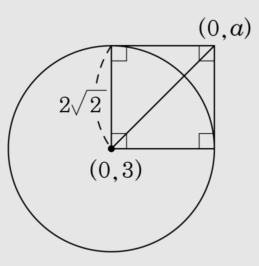
$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0$, $(a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는
반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$



$a-3=\pm4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$ 에서 $a=7$

12. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

13. 좌표평면 위의 두 점 A$(8, 0)$, B$(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

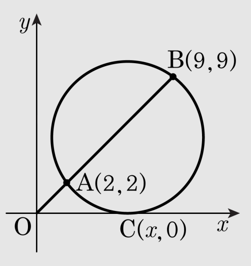
$\angle$AOB $= 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 C$(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

14. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

15. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c ,d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

16. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠

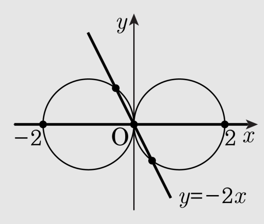
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡

㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0)$, $(\pm2,\ 0)$,

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

17. 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

중심이 $y=x+1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b=a+1$
따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$\sqrt{(a-1)^2+(a+1-6)^2}$
$=\ \sqrt{(a+3)^2+(a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a-5)^2=(a+3)^2$
$16a=16$
$\therefore\ a=1$
$\therefore\ (a,\ b)=(1,\ 2)$
따라서 $a+b=1+2=3$

18. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

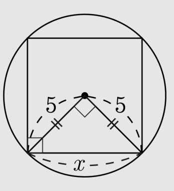
③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

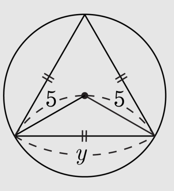
해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면



$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y라 하면



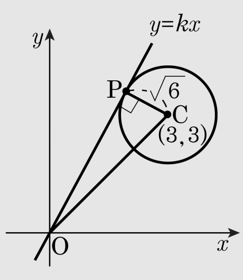
$y=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

19. $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ $6+2\sqrt{3}$

해설



$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 은 중심이$(3,3)$,
반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고
$P(x,y)$ 에 대하여
$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x}=k$, $y=kx$ 이므로
$\overline{OP}$ 의 기울기의 최댓값이다.
$y=kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면
$kx-y=0$ 에서 중심 $(3,\ 3)$ 까지의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.

$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{6}$, $k^2-6k+1=0$

$k=3\pm2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

20. 원 $x^2+y^2=1$과 직선$ax+by+c=0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

㉠ $c=b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c=2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c=\sqrt{a^2+b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선
$ax+by+c=0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

㉠ $d=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A\cap B)=2$

㉡ $d=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq\dfrac{2b}{\sqrt{2}b}>1$ $(\because\ b\geq a)$

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

그러므로 교점은 1 개다.

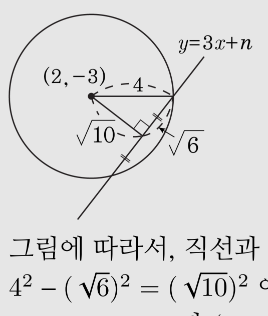
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

21. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2,\ -3)$ 의 거리

$\dfrac{|6+3+n|}{\sqrt{3^2+1}} = \sqrt{10}$

$|9+n| = 10$

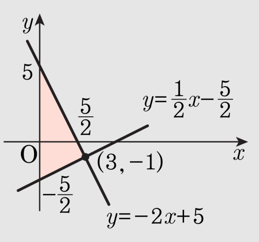
$\therefore\ n = \pm 10 - 9 = 1\ or\ -19$

$\therefore\ 1 - 19 = -18$

22. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설



접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y+1 = m(x-3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y+1 = m(x-3)$,
즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$, $|3m+1| = \sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore m = \dfrac{1}{2}$ 또는 $m = -2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$, $y = -2x + 5$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S = \dfrac{1}{2} \times \left\{5 - \left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\} \times 3 = \dfrac{45}{4}$

$\therefore 4S = 45$

23. 좌표평면 위의 점 P$(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 A$(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이런 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다.
㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1만큼 이동한다.
㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1만큼 이동한다.

① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회 ④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

24. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3 \cdots$ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$
$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because$ ㉠에서 $m+2n=3$)

25. 두 점 A$(-5,\ -2)$, B$(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle$ABP 의 무게중심 G 가 나타내는 도형의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

A$(-5,\ -2)$ B$(2,\ 5)$ P$(x,\ y)$

G $\left(\dfrac{x-3}{3},\ \dfrac{y+3}{3}\right)$

$X=\dfrac{x-3}{3},\ Y=\dfrac{y+3}{3}$

$x=3X+3,\ y=3Y-3$

$(x,\ y)$ 가 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이므로,

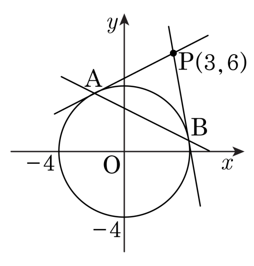
$(3X+3)^2+(3Y-3)^2=9$

$(X+1)^2+(Y-1)^2=1$

따라서 G$(X,\ Y)$ 는 반지름이 1 인 원

$\rightarrow\ 2\pi\cdot 1=2\pi$

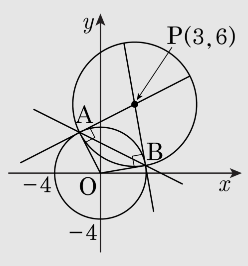
26. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 의 외부에 있는 점 P(3, 6) 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?



① $3x+6y-16=0$　② $3x-6y+16=0$
③ $3x+6y-14=0$　④ $3x-6y+14=0$
⑤ $x+2y-5=0$

해설

다음 그림에서 $\overline{PO}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ 이고, $\triangle PAO$가 직각삼각형이므로,



$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{29}$

이 때, 점 P를 중심으로 하고, 선분 PA 를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 이므로,

선분 AB 는 원 $x^2+y^2=16$ 과 새로운 원 $(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 의 공통현이다.

따라서 직선 AB 의 방정식은

$(x^2+y^2-16)-\{(x-3)^2+(y-6)^2-29\}=0$

$x^2+y^2-16-x^2+6x-9-y^2+12y-36+29=0$

$6x+12y-32=0$

$\therefore\ 3x+6y-16=0$

27. 2개의 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$　② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$　④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$
⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2 + y^2 = 1 \cdots\cdots$ ①
$(x-4)^2 + y^2 = 4 \cdots\cdots$ ②
공통접선을 $y = mx + n \cdots\cdots$ ③이라 하면
①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,
②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \text{이고}$$

$$\frac{|4m + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$\Rightarrow\ m^2 + 1 = n^2 \cdots\cdots$ ④
$4(m^2 + 1) = (4m + n)^2 \cdots$ ⑤
④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면
$(4m + 3n)(4m - n) = 0$

$n = -\frac{4}{3}m$에서 $m = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$

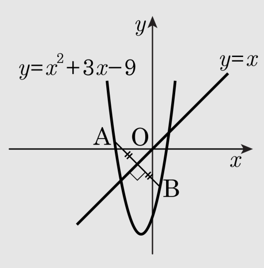
$n = 4m$에서 $m = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore\ m = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

28. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설



A 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 두면
B 의 좌표는 $(b,\ a)$ 가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a = b^2 + 3b - 9,\ b = a^2 + 3a - 9$ 가 성립한다.
두 식을 변변 빼서 정리하면
$(a - b)\ (a + b + 4) = 0$
$\therefore\ a + b + 4 = 0\ (\because a \neq b)$
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면
$a^2 + 4a - 5 = 0,\ (a + 5)(a - 1) = 0$
$a = 1$ 또는 -5, $b = -5$ 또는 1 이므로
A$(-5,\ 1)$, B$(1,\ -5)$ 가 된다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

29. 곡선 $y=x^2-3x$ 와 $y=-x^2+x+6$ 이 점 $P(a,\ b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 3

해설

$y=x^2-3x \quad \cdots$ ㉠

$y=-x^2+x+6 \quad \cdots$ ㉡이라고 하자.

㉠,㉡이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점P 이다.

㉠ : $y=x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

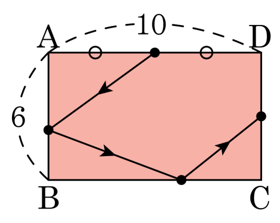
㉡ : $y=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+6$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$

$\therefore$ 중점 $(1,\ 2)$ 이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 이다.

$\therefore\ a=1,\ b=2$ 이므로 $a+b=3$

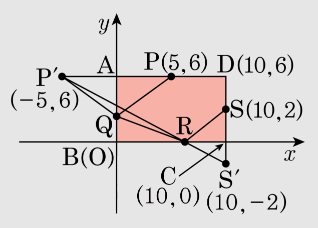
30. 직사각형 ABCD에서 변 AD의 중점에서 출발하여 변 AB, 변 BC를 거쳐 변 CD를 1 : 2로 내분하는 점에 이르는 최단 거리는? (단, $\overline{\mathrm{AB}}=6,\ \overline{\mathrm{AD}}=10$)



① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

점 B가 원점이 되도록 직사각형 ABCD를
좌표평면 위에 놓고 출발점을 P,
각 변과 만나는 점을 Q, R, S 라 할 때,
점 P 를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P′ ,
점 S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 S′ 이라고 하자.



이 때, 네 점 P′ , Q , R , S′ 이 일직선 위에
있을 때 구하는 거리는 최솟값을 갖는다.
$\therefore$ P′(−5, 6), S′(10, −2)에서
$\overline{\mathrm{P'S'}}=\sqrt{(10-(-5))^2+(-2-6)^2}=\sqrt{289}=17$