1. 방정식 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2,-3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$　　② 3, 7, 5　　③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$　　⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2,-3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$
$x^2+y^2+4x+6y+13-r^2=0$
이것이 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 과 일치해야 하므로
$A=4, B=6, 13-r^2=0$
$13-r^2=0$ 에서
$r=\sqrt{13}\ (\because r>0)$
따라서, $A=4, B=6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

2. 두 점 $(2,\ 1)$, $(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y+1)^2=29$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

③ $(x-2)^2+(y-1)^2=29$

④ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

⑤ $x^2+y^2=4$

해설

원의 중심은 $\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 이고,

반지름은 $\frac{\sqrt{(2+3)^2+(1+1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$ 이다.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

3. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\quad), k < (\qquad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

4. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

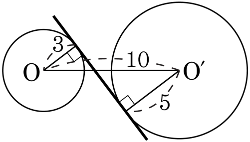
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

6. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

7. x 축에 접하고 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$

② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$

④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$ 라고 하면

x 축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나므로

$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서

$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a^2-8a=a(a-8)=0 \quad \therefore \quad a=0$ 또는 $a=8$

㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는

$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

8. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-5)^2+(y-4)^2=36$의 공통외접선의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

두 원의 중심거리는

$\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}$

두 원의 반지름의 길이의 합이 8, 차가 4로

$4<\sqrt{20}<8$ 이므로

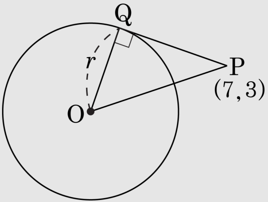
두 원은 서로 두 점에서 만난다.

따라서 공통외접선 2개를 가진다.

9. $\mathrm{P}(7,3)$ 에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=15$ 에 그은 한 접선의 접점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하면?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 20

해설



$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OQ}}^2$$
$$=(6^2+2^2)-15=25$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=5$$

10. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$$

$$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

11. 점 A$(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

점 A$(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을

$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서

접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0,\quad (a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

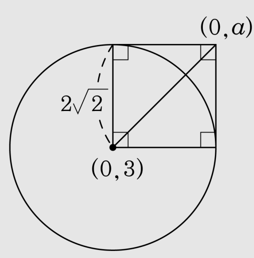
원의 중심 $(0,\ 3)$에서 A$(0,\ a)$까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$a-3=\pm 4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$ 에서 $a=7$



12. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

13. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8,0)$, $\mathrm{B}(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

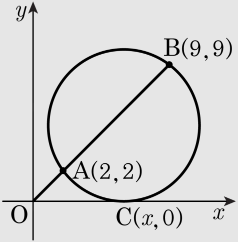
$\angle\mathrm{AOB}=90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

14. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

15. 원 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 과 함수 $y=\dfrac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c ,d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\dfrac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\dfrac{9}{4x^2}=\dfrac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}\times 4=9$

16. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$㉠

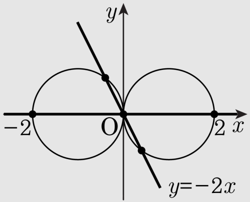
$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0)$, $(\pm 2,\ 0)$,

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

17. 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y=x+1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b=a+1$
따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$\sqrt{(a-1)^2+(a+1-6)^2}$
$=\sqrt{(a+3)^2+(a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a-5)^2=(a+3)^2$
$16a=16$
$\therefore\ a=1$
$\therefore\ (a,\ b)=(1,\ 2)$
따라서 $a+b=1+2=3$

18. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

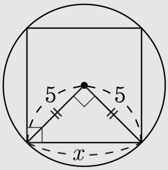
③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

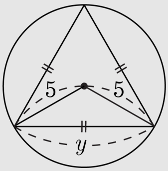
해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면



$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y라 하면



$y=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

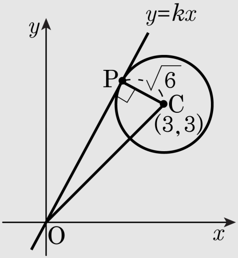
19. $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$

④ 6 ⑤ $6+2\sqrt{3}$

해설

$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 은 중심이$(3,3)$,
반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고
$\mathrm{P}(x,y)$ 에 대하여
$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x}=k$, $y=kx$ 이므로
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기의 최댓값이다.
$y=kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면



$kx-y=0$ 에서 중심 $(3,\ 3)$ 까지의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.

$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{6}$, $k^2-6k+1=0$

$k=3\pm2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

20. 원 $x^2+y^2=1$과 직선$ax+by+c=0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

㉠ $c=b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c=2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c=\sqrt{a^2+b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax+by+c=0$에 이르는 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

㉠ $d=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A\cap B)=2$

㉡ $d=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq\dfrac{2b}{\sqrt{2}b}>1$ $(\because\ b\geq a)$

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

그러므로 교점은 1 개다.

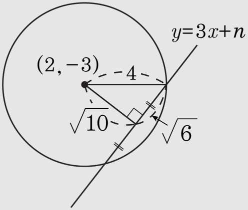
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

21. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2,\ -3)$ 의 거리

$$\frac{|6+3+n|}{\sqrt{3^2+1}} = \sqrt{10}$$

$|9+n| = 10$

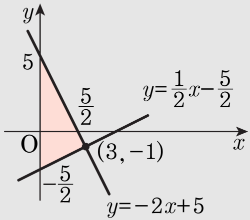
$\therefore\ n = \pm 10 - 9 = 1\ or\ -19$

$\therefore\ 1 - 19 = -18$

22. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설



접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y+1=m(x-3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y+1=m(x-3)$,
즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}\,,\ |3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$$\therefore m=\frac{1}{2} \text{ 또는 } m=-2$$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\,,\ y=-2x+5$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$$

$$\therefore 4S=45$$

23. 좌표평면 위의 점 P$(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 A$(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다. ㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1 만큼 이동한다. ㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

24. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,

$(x-m)+2(y-n)-1=0,\ x+2y-m-2n-1=0$을

$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,

$-m-2n=-3\ \cdots$ ㉠

점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,

$(1+m,\ 2+n)$

$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$

$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$

($\because$ ㉠에서 $m+2n=3$)

25. 두 점 A$(-5,\ -2)$, B$(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle$ABP 의 무게중심 G 가 나타내는 도형의 자취의 길이는?

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

A$(-5,\ -2)$ B$(2,\ 5)$ P$(x,\ y)$

G $\left(\dfrac{x-3}{3},\ \dfrac{y+3}{3}\right)$

$X=\dfrac{x-3}{3},\ Y=\dfrac{y+3}{3}$

$x=3X+3,\ y=3Y-3$

$(x,\ y)$ 가 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이므로,

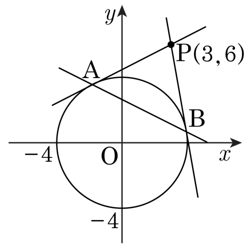
$(3X+3)^2+(3Y-3)^2=9$

$(X+1)^2+(Y-1)^2=1$

따라서 G$(X,\ Y)$ 는 반지름이 1 인 원

$\rightarrow\ 2\pi\cdot 1=2\pi$

26. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 의 외부에 있는 점 P(3, 6) 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?



① $3x+6y-16=0$　② $3x-6y+16=0$

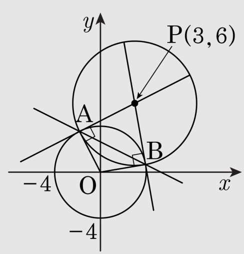
③ $3x+6y-14=0$　④ $3x-6y+14=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PO}} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 이고, $\triangle$PAO가 직각삼각형이므로,

$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2-4^2} = \sqrt{29}$



이 때, 점 P를 중심으로 하고,
선분 PA 를 반지름으로 하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 이므로,
선분 AB 는 원 $x^2+y^2=16$ 과
새로운 원 $(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 의 공통현이다.
따라서 직선 AB 의 방정식은
$(x^2+y^2-16)-\{(x-3)^2+(y-6)^2-29\}=0$
$x^2+y^2-16-x^2+6x-9-y^2+12y-36+29=0$
$6x+12y-32=0$
$\therefore\ 3x+6y-16=0$

27. 2개의 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$
② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$
④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$
⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ①
$(x-4)^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ②
공통접선을 $y=mx+n \cdots\cdots$ ③이라 하면
①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,
②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \text{ 이고}$$

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\Rightarrow\ m^2+1=n^2 \cdots\cdots$ ④
$4(m^2+1)=(4m+n)^2 \cdots$ ⑤
④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면
$(4m+3n)(4m-n)=0$

$n=-\frac{4}{3}m$ 에서 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$

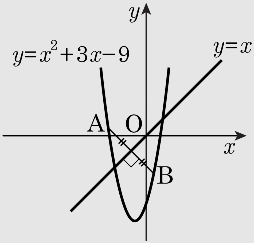
$n=4m$ 에서 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore\ m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

28. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설



A 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 두면
B 의 좌표는 $(b,\ a)$ 가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a = b^2 + 3b - 9,\ \ b = a^2 + 3a - 9$ 가 성립한다.
두 식을 변변 빼서 정리하면
$(a - b)\ (a + b + 4) = 0$
$\therefore\ a + b + 4 = 0\ (\because a \neq b)$
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면
$a^2 + 4a - 5 = 0,\ (a + 5)(a - 1) = 0$
$a = 1$ 또는 -5, $b = -5$ 또는 1 이므로
$A(-5,\ 1)$, $B(1,\ -5)$ 가 된다.
$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

29. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a,\ b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = x^2 - 3x \quad \cdots ㉠$

$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots ㉡$이라고 하자.

㉠, ㉡이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점P 이다.

㉠ : $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

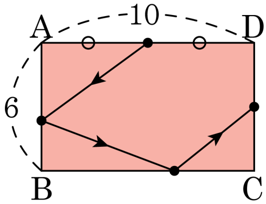
㉡ : $y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$

$\therefore$ 중점 $(1,\ 2)$ 이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 이다.

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

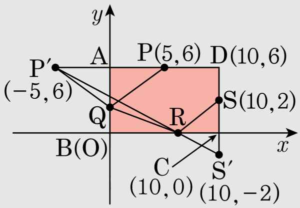
30. 직사각형 ABCD에서 변 AD의 중점에서 출발하여 변 AB, 변 BC를 거쳐 변 CD를 1 : 2로 내분하는 점에 이르는 최단 거리는? (단, $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=10$)



① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

점 B가 원점이 되도록 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고 출발점을 P, 각 변과 만나는 점을 Q, R, S 라 할 때, 점 P 를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P′ , 점 S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 S′ 이라고 하자.



이 때, 네 점 P′ , Q , R , S′ 이 일직선 위에 있을 때 구하는 거리는 최솟값을 갖는다.

$\therefore$ P′(−5, 6), S′(10, −2)에서

$\overline{P'S'}=\sqrt{(10-(-5))^2+(-2-6)^2}=\sqrt{289}=17$