

1. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $P(x, 0)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2, 0)$

3. $ab < 0$, $ac > 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면은?

- ① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0$, $ac > 0$ 이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b 로 나

누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

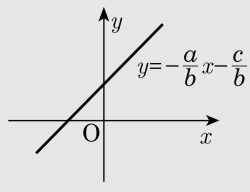
한편, $ab < 0$, $ac > 0$ 이므로

$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

따라서 $bc < 0$

$$(y \text{ 절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제 4 사분면은 지나지 않는다.



4. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

5. A(0, -2), B(3, 3), C(4, 0) 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

또, 직선 BC의 방정식은 $3x + y - 12 = 0$ 이므로

A(0, -2)로부터 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 7$$

6. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

7. 두 점 $A(1, 2)$, $B(-3, 0)$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?
- ① $y = 2x + 1$ ② $y = 2x - 1$ ③ $y = -2x + 1$
④ $y = -2x - 1$ ⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$
양변을 제곱해서 정리하면
 $-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$
 $\therefore y = -2x - 1$

해설

두 점 으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고
 $\overline{AB}$ 의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.
 $\therefore y - 1 = -2(x + 1)$
 $\therefore y = -2x - 1$

8. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?
- ① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
- ④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한 점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-5)^2\} \\ &\quad + \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} \\ &= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 60 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 8y + 16) + 10 \\ &= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 10\end{aligned}$$

따라서 $x = 3$, $y = 4$ 일 때 최솟값을 갖는다.

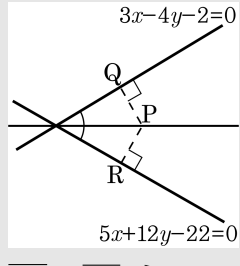
9. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

즉, $13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22)$ 또는

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

10. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A(-2, 0), B(4, -2)로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① (-1, 1)

② (0, 2)

③ (1, 3)

④ (2, 4)

⑤ (3, 5)

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 P(a, a + 2)라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$$

$$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$$

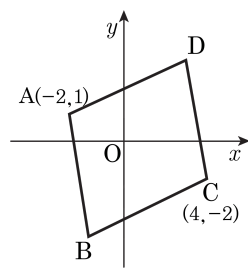
$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

11. 좌표평면 위에 마름모 ABCD 가 있다. 두 점 A, C 의 좌표가 각각 $(-2, 1)$, $(4, -2)$ 일 때, 두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $y = x - 2$ ② $y = x - \frac{5}{2}$
 ③ $y = 2x - \frac{3}{2}$ ④ $y = 2x - 2$
 ⑤ $y = 2x - \frac{5}{2}$



해설

마름모의 두 대각선은 서로를 수직 이등분하므로 $\overline{BD}$ 는 $\overline{AC}$ 와 수직이고 두 점 A, C 의 중점을 지난다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $\frac{1 - (-2)}{-2 - 4} = -\frac{1}{2}$,

중점은 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = 2(x - 1) - \frac{1}{2} = 2x - \frac{5}{2}$$

12. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

13. 두 직선 $x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점과 직선 $4x + 3y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점은 $(2, 1)$

$\therefore 4x + 3y - 1 = 0$ 까지의 거리 :

$$\frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

14. 두 점 A (1, -1), B (4, -5)을 잇는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는?

① (4, -1)

② $\left(\frac{11}{2}, -7\right)$

③ $\left(-3, \frac{15}{2}\right)$

④ $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$

⑤ (3, 1)

해설

$$\left(\frac{12-1}{3-1}, \frac{-15+1}{3-1}\right) = \left(\frac{11}{2}, -7\right)$$

15. 세 점 A(6, -1), B(-1, 2), C(4, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 (m, n) 이라 할 때, mn 의 값은?

① 4

② $\frac{13}{3}$

③ $\frac{14}{3}$

④ 5

⑤ $\frac{16}{3}$

해설

무게중심

$$G\left(\frac{6+(-1)+4}{3}, \frac{-1+2+3}{3}\right) = \left(3, \frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore mn = 4$$