

1. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)$$

$$= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z$$

$$= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y)$$

$$= (z-y) \{ x^2 - (z+y)x + zy \}$$

$$= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\therefore \text{(준식)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

2. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

3. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

4. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} - \frac{2x+1}{x(3x+1)}$ 을 간단히 하면 ?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식을 이항분리시키면,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1}\right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x+1}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

5. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} = S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1 \times 2007} + \frac{1}{2 \times 2006} + \frac{1}{3 \times 2005} + \cdots + \frac{1}{2006 \times 2} + \frac{1}{2007 \times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?
- ① $\frac{S}{1003}$ ② $\frac{S}{\frac{1004}{2006}}$ ③ $\frac{S}{2006}$
 ④ $\frac{S}{2007}$ ⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A \times B$ 의 꼴이고
 $A + B = 2008$ 로 일정하므로
 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{A+B} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용한다.

∴(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2007} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2006} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2005} \right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2006} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{1} \right) \\
 &= \frac{1}{2008} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \right\} \\
 &= \frac{2}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \\
 &= \frac{S}{1004}
 \end{aligned}$$

6. 다음 식을 간단히 한 식은?

$$\frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}}$$

- ① $a + 1$ ② $a + 2$ ③ $-a + 1$
④ $-a + 2$ ⑤ $a - 1$

해설

아래에서부터 계산해 올라가자.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{a - 1}} = \frac{a - 1}{a - 1 - a} = -a + 1$$

7. 서로소인 두 자연수 $m, n (m > n)$ 에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$ 을 나타낼 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

의 값은?

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} \frac{151}{87} &= 1 + \frac{64}{87} = 1 + \frac{1}{\frac{87}{64}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{23}{64}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{64}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{18}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{18}{5}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{5}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}} \end{aligned}$$

$\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 3$ 이므로
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$

8. a, b, c 가 서로 다른 수이고, $\langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c}$ 라고 정의한다. $\langle a, b, c \rangle = x$ 라 할 때, $\langle b, c, a \rangle$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$ 라 하자. 이때, x 에 관한 식 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(10)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \langle a, b, c \rangle &= \frac{a-c}{b-c} = x \\ \therefore a &= c + (b-c)x \\ \text{(ii)} \quad \langle b, c, a \rangle &= \frac{b-a}{c-a} = \frac{b - \{c + (b-c)x\}}{c - \{c + (b-c)x\}} \\ &= \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x} \\ \therefore f(x) &= \frac{x-1}{x} \\ \therefore f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(9) \times f(10) &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

9. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{xy}{x^2 + 2y^2}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{2}{17}$ ② $\frac{3}{17}$ ③ $\frac{4}{17}$ ④ $\frac{5}{17}$ ⑤ $\frac{6}{17}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} = \frac{y}{3} &\Rightarrow x = \frac{4}{3}y \\ \therefore \frac{xy}{x^2 + 2y^2} &= \frac{16}{9} \frac{y^2}{y^2 + 2y^2} = \frac{6}{17}\end{aligned}$$

10. $a : b = c : d$ 일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b + 2d \neq 0$, $a - 2b \neq 0$, $c - 3d \neq 0$ 이다.)

보기

㉠ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

㉡ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d}$

㉢ $\frac{a+2b}{a-2b} = \frac{c+3d}{c-3d}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots$ 참

㉡ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc, ad = bc \dots$ 참

㉢ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \dots$ 거짓

11. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

12. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{-x+2(y+4z)-8 \times z}{-5+2 \times 2-8 \times 3} \\ &= \frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24} = \frac{-x+2y}{-25} \\ & \therefore A = -25 \end{aligned}$$

13. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

14. $\frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c} = k$ 라 할 때, k 의 값으로 가능한 것을 모두 고르면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(분모의 합) = $a + 2b + 3c$

i) $a + 2b + 3c = 0$ 일 때

$2b + 3c = -a$, $3c + a = -2b$, $a + 2b = -3c$ 이므로

주어진 식에 각각 대입하면

$$\frac{-a}{a} = \frac{-2b}{2b} = \frac{-3c}{3c} = k$$

$$\therefore k = -1$$

ii) $a + 2b + 3c \neq 0$ 일 때

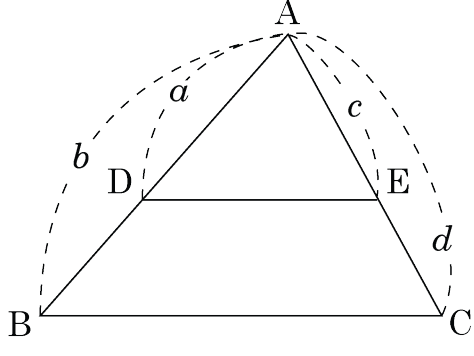
$$k = \frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c}$$

$$= \frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c} \quad (\because \text{가바의 리})$$

$$= \frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c} = 2$$

i), ii) 에서 $k = -1$ 또는 $k = 2$

15. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$ 일 때, 다음 중 a, b, c, d 사이의 관계로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b, c \neq d$)



① $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{d-c}$

③ $a(d-c) = c(b-a)$

⑤ $\frac{b-a}{a} = \frac{d}{c}$

② $ac - bd = 0$

④ $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$

해설

$a : b = c : d$ 이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

16. 한 변의 길이가 a 인 정삼각형과 반지름의 길이가 b 인 원의 넓이가 같을 때, $a^4 : b^4$ 의 값은?

① $8\pi^2 : 3$

② $8\pi^2 : 5$

③ $4\pi^2 : 1$

④ $12\pi^2 : 5$

⑤ $16\pi^2 : 3$

해설

정삼각형과 원의 넓이가 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, πb^2 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \pi b^2, a^2 : b^2 = 4\pi : \sqrt{3}$$

$$\therefore a^4 : b^4 = 16\pi^2 : 3$$

17. 세 개의 숫자가 있다. 이들 중 서로 다른 두 수씩 더하면 각각 a, b, c 되고, 이 세수의 곱은 1이라 한다. 이때, 이들 세 수 중 서로 다른 두 수씩 곱한 수들의 역수의 합은?

① $a + b + c$

② abc

③ $ab + bc + ca$

④ $\frac{a + b + c}{2}$

⑤ $\frac{a + b + c}{3}$

해설

세 수를 각 p, q, r 이라고 하면

$$\begin{cases} p + q = a \\ q + r = b \\ r + p = c \end{cases}$$

$$pqr = 1, p + q + r = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} = \frac{p + q + r}{pqr} = \frac{a + b + c}{2}$$

18. A, B 두 자동차의 연비 (연료 1l 로 갈 수 있는 거리 : km/l)의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A,B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?
- ① 300 km ② 350 km ③ 400 km
- ④ 450 km ⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/l)	5k	6k
연료 탱크의 용량(l)	4m	3m
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$\left(4m - \frac{120}{5k}\right) : \left(3m - \frac{120}{6k}\right) = 7 : 5$
∴ $mk = 20$
따라서, A 자동차가 연료 4m 으로 갈 수 있는 총거리는
 $5k \times 4m = 20mk = 400(\text{km})$

19. 분수함수 $y = \frac{x+3}{x+1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 치역을
바르게 구한 것은?

① $\{y \mid y < 2\}$

② $\{y \mid y \leq 2\}$

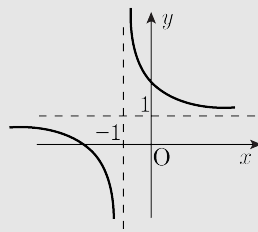
③ $\{y \mid y \leq -2\}$

④ $\{y \mid y \geq 2\}$

⑤ $\{y \mid y \geq -2\}$

해설

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+1)+2}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$$



$x = 1$ 일 때, $y = \frac{1+3}{1+1} = 2$ 이므로,

치역은 $\{y \mid y \geq 2\}$

20. 함수 $y = \frac{1}{x+2} + 2$ 의 그래프가 $y = ax + b$, $y = cx + d$ 에 대하여 대칭이 될 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점근선의 교점이 $(-2, 2)$ 이므로
두 직선 $y = ax + b$ 와 $y = cx + d$ 에 대하여
대칭이 되려면 $a = 1$, $c = -1$
따라서 $y - 2 = x + 2$ 또는 $y - 2 = -(x + 2)$
 $\therefore y = x + 4$ 또는 $y = -x$
 $\therefore b = 4, d = 0$
 $\therefore a + b + c + d = 4$

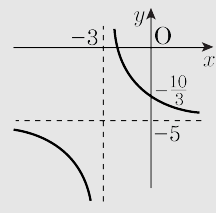
21. 다음 중 함수 $y = \frac{5}{x+3} - 5$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

- ① 제1사분면 ② 제2사분면
③ 제3사분면 ④ 제4사분면
⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$$y = \frac{5}{x+3} - 5$$

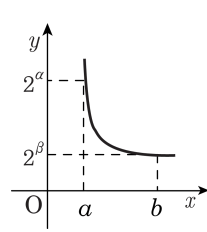
$$x = 0 \text{ 일 때 } y = \frac{5}{0+3} - 5 = -\frac{10}{3}$$



따라서 제1사분면을 지나지 않는다.

22. 함수 $y = f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab = 16$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2



해설

$f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$$f(a) = \frac{1}{2a} = 2^\alpha, f(b) = \frac{1}{2b} = 2^\beta$$

$f(a)$ 와 $f(b)$ 를 곱하면

$$f(a) \times f(b) = \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2b} = 2^{\alpha+\beta}$$

$$\therefore 2^{\alpha+\beta} = \frac{1}{4ab} = \frac{1}{4 \times 16} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

23. $2 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \frac{3x-4}{x-1}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$$x = 2 \text{ 일 때 최소이므로, } M = \frac{-1}{2-1} + 3 = 2$$

$$x = 4 \text{ 일 때 최대이므로, } m = \frac{-1}{4-1} + 3 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore Mm = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

24. $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선이 $x = a, y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x+1} \dots \textcircled{1} \text{에서}$$

x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{-x+2}{x+1} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \Rightarrow -f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x+1}$$

점근선 $x = -1, y = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

25. 함수 $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 곡선 $y = g(x)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 곡선 $y = f(x)$ 와 일치한다고 한다. $a + b$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+6}{x+2} \text{ 에서 } x = \frac{-2y+6}{y-1} \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \frac{-2x+6}{x-1}$$

$$\text{그런데 } f(x) = 1 + \frac{4}{x+2}, \quad g(x) = -2 + \frac{4}{x-1}$$

곡선 $g(x)$ 를 x 축 방향으로 -3 만큼,

y 축 방향으로 3 만큼 평행이동하면

$y = f(x)$ 와 일치하므로

$$a = -3, b = 3$$

$$\therefore a + b = 0$$