1. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

2. $\dfrac{x-1}{3x-6} \times \dfrac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

3. $\dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1, \quad a=-1$

$\therefore \ a=-1, \quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

4. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}+\dfrac{x}{(2x+1)(3x+1)}-\dfrac{2x+1}{x(3x+1)}$ 을 간단히 하면 ?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{2}{3}$

해설

주어진 식을 이항분리시키면,

$$(\text{준식})=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x+1}\right)$$

$$=0$$

5. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}=S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1\times2007}+\frac{1}{2\times2006}+\frac{1}{3\times2005}+\cdots+\frac{1}{2006\times2}+\frac{1}{2007\times1}$ 의 값을 S 로 나타내면?

① $\frac{S}{1003}$ ② $\frac{S}{1004}$ ③ $\frac{S}{2006}$

④ $\frac{S}{2007}$ ⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A\times B$ 의 꼴이고

$A+B=2008$ 로 일정하므로

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{A+B}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용한다.

$\therefore$(주어진 식)

$$=\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2007}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2006}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2005}\right)+\cdots+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2006}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{1}\right)$$

$$=\frac{1}{2008}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)+\left(\frac{1}{2007}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)$$

$$=\frac{S}{1004}$$

6. 다음 식을 간단히 한 식은?

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}$$

① $a+1$　② $a+2$　③ $-a+1$

④ $-a+2$　⑤ $a-1$

해설

아래에서부터 계산해 올라가자.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1-\frac{a}{a-1}}=\frac{a-1}{a-1-a}=-a+1$$

7. 서로소인 두 자연수 $m,\ n(m>n)$에 대하여 유리수 $\dfrac{m}{n}$을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\dfrac{151}{87}$을 나타낼 때, $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값은?

$$\frac{m}{n}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\frac{151}{87}=1+\frac{64}{87}=1+\cfrac{1}{\cfrac{87}{64}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{23}{64}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{64}{23}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{18}{23}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{23}{18}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{18}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{5}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

$\therefore a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_4=3$ 이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+1+3=7$

8. a, b, c가 서로 다른 수이고, $< a,\ b,\ c >= \dfrac{a-c}{b-c}$ 라고 정의한다. $< a,\ b,\ c >= x$라 할 때, $< b,\ c,\ a >$를 x에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$라 하자. 이때, x에 관한 식 $f(x)$에 대하여 $f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(10)$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

해설

(i) $< a,\ b,\ c >= \dfrac{a-c}{b-c} = x$

$\therefore\quad a = c + (b-c)x$

(ii) $< b,\ c,\ a > = \dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{b-\{c+(b-c)x\}}{c-\{c+(b-c)x\}}$

$$= \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x}$$

$\therefore\quad f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$\therefore f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(9)\times f(10)$

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{9}{10}$

$= \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} \neq 0$일 때, $\dfrac{xy}{x^2 + 2y^2}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{2}{17}$　② $\dfrac{3}{17}$　③ $\dfrac{4}{17}$　④ $\dfrac{5}{17}$　⑤ $\dfrac{6}{17}$

해설

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$$\therefore \ \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \frac{\frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2 + 2y^2} = \frac{6}{17}$$

10. $a : b = c : d$일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b+2d \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $c-3d \neq 0$이다.)

보기

ㄱ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

ㄴ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d}$

ㄷ $\dfrac{a+2b}{a-2b} = \dfrac{c+3d}{c-3d}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \cdots$ 참

ㄴ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc$, $ad = bc \cdots$ 참

ㄷ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \cdots$ 거짓

11. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$ 일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$ 이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$ ㉠

$x-2y+3z=0\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ $: 3x=z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}$ $\quad\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

12. $\frac{x}{5}=\frac{y+4z}{2}=\frac{z}{3}=\frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A=-25$

해설

$$\frac{-x+2(y+4z)-8\times z}{-5+2\times 2-8\times 3}$$

$$=\frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24}=\frac{-x+2y}{-25}$$

$\therefore A=-25$

13. $\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{2b+c}{4}=\dfrac{c}{3}=\dfrac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x=10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}\\&=\frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}\\&=\frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$\therefore x=10$

14. $\dfrac{2b+3c}{a}=\dfrac{3c+a}{2b}=\dfrac{a+2b}{3c}=k$라 할 때, k의 값으로 가능한 것을 모두 고르면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

(분모의 합)$=a+2b+3c$

ⅰ) $a+2b+3c=0$일 때

$2b+3c=-a,\ 3c+a=-2b,\ a+2b=-3c$이므로

주어진 식에 각각 대입하면

$$\frac{-a}{a}=\frac{-2b}{2b}=\frac{-3c}{3c}=k$$

$\therefore\ k=-1$

ⅱ) $a+2b+3c\neq 0$일 때

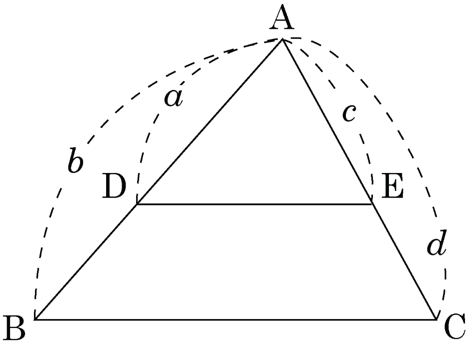
$$k=\frac{2b+3c}{a}=\frac{3c+a}{2b}=\frac{a+2b}{3c}$$

$$=\frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c}\ (\because \text{가비의 리})$$

$$=\frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c}=2$$

ⅰ), ⅱ)에서 $k=-1$ 또는 $k=2$

15. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{AE}=c$, $\overline{AC}=d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b$, $c \neq d$)



① $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b-a}{d-c}$　② $ac-bd=0$

③ $a(d-c)=c(b-a)$　④ $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{d-c}{c}$

⑤ $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{d}{c}$

해설

$a:b=c:d$이므로, $a:(b-a)=c:(d-a)$

16. 한 변의 길이가 a인 정삼각형과 반지름의 길이가 b인 원의 넓이가 같을 때, $a^4 : b^4$의 값은?

① $8\pi^2 : 3$　② $8\pi^2 : 5$　③ $4\pi^2 : 1$

④ $12\pi^2 : 5$　⑤ $16\pi^2 : 3$

해설

정삼각형과 원의 넓이가 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, πb^2이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \pi b^2$, $a^2 : b^2 = 4\pi : \sqrt{3}$

$\therefore a^4 : b^4 = 16\pi^2 : 3$

17. 세 개의 숫자가 있다. 이들 중 서로 다른 두 수씩 더하면 각 각 a, b, c 되고, 이 세수의 곱은 1이라 한다. 이때, 이들 세 수 중 서로 다른 두 수씩 곱한 수들의 역수의 합은?

① $a+b+c$ ② abc ③ $ab+bc+ca$

④ $\dfrac{a+b+c}{2}$ ⑤ $\dfrac{a+b+c}{3}$

해설

세 수를 각 p, q, r이라고 하면

$$\begin{cases} p+q=a \\ q+r=b \\ r+p=c \end{cases}$$

$$pqr=1,\ p+q+r=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}=\frac{p+q+r}{pqr}=\frac{a+b+c}{2}$$

18. A, B 두 자동차의 연비 (연료 1 l 로 갈 수 있는 거리 : km/l)의 비는 5 : 6 이고, 연료 탱크의 용량의 비는 4 : 3 이다. 이 두 대의 자동차에 연료를 가득 채우고 120 km 를 달린 후의 A, B 두 차에 남아 있는 연료의 비는 7 : 5 이었다. A 자동차가 연료를 가득 채우고 갈 수 있는 총거리는?

① 300 km ② 350 km ③ 400 km

④ 450 km ⑤ 500 km

해설

	A	B
연비(km/ l)	$5k$	$6k$
연료 탱크의 용량(l)	$4m$	$3m$
소요된 연료(l)	$\frac{120}{5k}$	$\frac{120}{6k}$

$$\left(4m-\frac{120}{5k}\right) : \left(3m-\frac{120}{6k}\right)=7 : 5$$

$\therefore\ mk=20$

따라서, A 자동차가 연료 4 m 으로 갈 수 있는 총거리는

$5k\times 4m=20mk=400(\text{ km})$

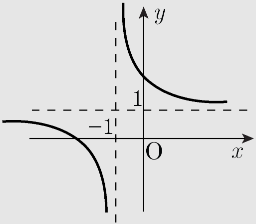
19. 분수함수 $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid y < 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 2\}$ ③ $\{y \mid y \leq -2\}$

④ $\{y \mid y \geq 2\}$ ⑤ $\{y \mid y \geq -2\}$

해설

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+1)+2}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$$



$x = 1$ 일 때, $y = \dfrac{1+3}{1+1} = 2$ 이므로,

치역은 $\{y \mid y \geq 2\}$

20. 함수 $y = \dfrac{1}{x+2} + 2$의 그래프가 $y = ax + b,\ y = cx + d$에 대하여 대칭이 될 때, $a + b + c + d$의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점근선의 교점이 $(-2,\ 2)$이므로
두 직선 $y = ax + b$ 와 $y = cx + d$에 대하여
대칭이 되려면 $a = 1,\ c = -1$
따라서 $y - 2 = x + 2$ 또는 $y - 2 = -(x + 2)$
$\therefore\ y = x + 4$ 또는 $y = -x$
$\therefore\ b = 4,\ d = 0$
$\therefore\ a + b + c + d = 4$

21. 다음 중 함수 $y=\dfrac{5}{x+3}-5$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면 ② 제2사분면

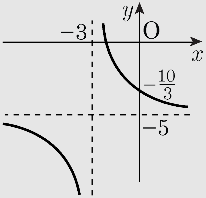
③ 제3사분면 ④ 제4사분면

⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

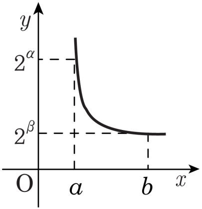
$$y=\frac{5}{x+3}-5$$

$x=0$일 때 $y=\dfrac{5}{0+3}-5=-\dfrac{10}{3}$



따라서 제1사분면을 지나지 않는다.

22. 함수 $y = f(x) = \dfrac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab = 16$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?



① -6　② -5　③ -4

④ -3　⑤ -2

해설

$f(x) = \dfrac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$f(a) = \dfrac{1}{2a} = 2^{\alpha}$, $f(b) = \dfrac{1}{2b} = 2^{\beta}$

$f(a)$ 와 $f(b)$를 곱하면

$$f(a) \times f(b) = \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2b} = 2^{\alpha+\beta}$$

$$\therefore\ 2^{\alpha+\beta} = \frac{1}{4ab} = \frac{1}{4 \times 16} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$\therefore\ \alpha + \beta = -6$$

23. $2 \leq x \leq 4$일 때, 함수 $y = \dfrac{3x-4}{x-1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ $\dfrac{16}{3}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

해설

$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$x = 2$일 때 최소이므로, $M = \dfrac{-1}{2-1} + 3 = 2$

$x = 4$일 때 최대이므로, $m = \dfrac{-1}{4-1} + 3 = \dfrac{8}{3}$

$\therefore \quad Mm = 2 \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

24. $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선이 $x=a$, $y=b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1} \cdots$ ①에서

x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{-x+2}{x+1} \cdots$ ②

① $+2\times$② $\Rightarrow -f(x)=\frac{1}{x+1}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+1}$

점근선 $x=-1$, $y=0$

$\therefore a+b=-1$

25. 함수 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다고 한다. $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=\dfrac{x+6}{x+2}$에서 $x=\dfrac{-2y+6}{y-1}$이므로

$g(x)=\dfrac{-2x+6}{x-1}$

그런데 $f(x)=1+\dfrac{4}{x+2}$, $g(x)=-2+\dfrac{4}{x-1}$

곡선 $g(x)$를 x축 방향으로 -3만큼,

y축 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=f(x)$와 일치하므로

$a=-3, b=3$

$\therefore a+b=0$