

1. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$g((-1)+1) = g(0) = f((-1)-1)$$

$$= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3$$

$$= -3$$

2. 임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이고 $f(3) = 1$ 일 때, $f(27)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3, y = 3$ 일 때

$$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$$

$x = 9, y = 3$ 일 때

$$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

3. 임의의 자연수에 대하여 함수 f 가 다음 두 조건을 만족할 때,
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2008)$ 의 값은?

$$\begin{aligned} \text{(가)} & f(1) = 1, f(2) = 2 \\ \text{(나)} & f(x+1) = f(x+2) + f(x) \end{aligned}$$

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

$$\begin{aligned} \text{(나)에서 } f(x+2) &= f(x+1) - f(x) \text{ 이므로} \\ f(3) &= f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1 \\ f(4) &= f(3) - f(2) = 1 - 2 = -1 \\ f(5) &= f(4) - f(3) = -1 - 1 = -2 \\ f(6) &= f(5) - f(4) = -2 - (-1) = -1 \\ f(7) &= f(6) - f(5) = -1 - (-2) = 1 \\ f(8) &= f(7) - f(6) = 1 - (-1) = 2 \\ &\vdots \\ \text{따라서 } f(1) &= f(7), f(2) = f(8), f(3) = f(9), \dots, \\ f(x) &= f(x+6) \text{ 이고} \\ f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) &= 0 \text{ 이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2008) &= 334 \{f(1) + f(2) + \dots + f(5) + f(6)\} \\ &\quad + f(2005) + f(2006) + f(2007) + f(2008) \\ &= 334 \cdot 0 + 1 + 2 + 1 + (-1) = 3 \end{aligned}$$

4. N 을 자연수의 집합이라 할 때, 함수 $f : N \rightarrow N \cup \{0\}$ 이

- (i) p 가 소수이면 $f(p) = 1$
 (ii) $f(mn) = nf(m) + mf(n)$

을 만족시킨다고 한다. 이 때, $f(2^{2002})$ 의 값은?

- ① $2001 \cdot 2^{2001}$ ② $2001 \cdot 2^{2002}$ ③ $2002 \cdot 2^{2001}$
 ④ $2002 \cdot 2^{2002}$ ⑤ $2003 \cdot 2^{2001}$

해설

$f(mn) = nf(m) + mf(n)$ 에서 양변을 mn 으로 나누면

$$\frac{f(mn)}{mn} = \frac{f(m)}{m} + \frac{f(n)}{n}$$

$$\frac{f(2^{2002})}{2^{2002}} = \frac{f(2)}{2} + \frac{f(2^{2001})}{2^{2001}}$$

$$= \frac{1}{2} + \left\{ \frac{f(2)}{2} + \frac{f(2^{2000})}{2^{2000}} \right\}$$

⋮

$$= 2002 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(2^{2002}) = 2002 \cdot 2^{2001}$$

5. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$ 이 성립할 때 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$ 에서
 $f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$ 이므로
 $\therefore g^{-1}(a) = 1$ 에서 $a = g(1) = 4$

6. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1}(3) &= a \text{ 로 놓으면 } (f \circ g)(a) = 3 \\ 2a - 3 &= 3 \text{ 에서 } a = 3 \\ \therefore (f \circ g)^{-1}(3) &= 3 \\ \therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) &= (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3) \\ h^{-1}(3) &= b \text{ 놓으면 } h(b) = 3 \\ 2b + 1 &= 3 \\ \therefore b &= 1 \\ \therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) &= h^{-1}(3) = 1\end{aligned}$$

7. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{ 라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$

8. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점 (2, 2), (3, 3)이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

9. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
 $x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
 $x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
 따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
 이 두 교점 사이의 거리는
 $\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
 즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
 따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
 그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
 $= \sqrt{2} \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

10. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

- ① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{라 하면 } y^2 = x-2$$

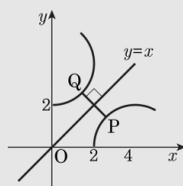
$$\therefore x = y^2 + 2$$

위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$$

한편, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로

직선 $y = x$ 에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은

선분 PQ 와 직선 $y = x$ 가 수직을 이룰 때이다.

동점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의

거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a, a^2 + 2)$ 라 놓고

직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|a - (a^2 + 2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8} \text{이므로}$$

두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$$\therefore \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

11. 함수 $y = |x-2| + |x+1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y = |x-2| + |x+1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x-2) - (x+1) = -2x+1$$

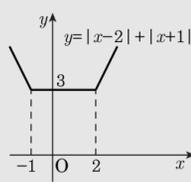
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$y = -(x-2) + (x+1)$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$y = (x-2) + (x+1) = 2x-1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4 개다.



12. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서

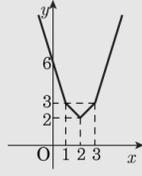
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1 + x-2 + x-3 = 3x-6$

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1 + x-2 - (x-3) = x$

(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1 - (x-2) - (x-3) = -x+4$

(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) - (x-2) - (x-3) = -3x+6$

따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2, n = 2$

$\therefore mn = 4$

13. 수직선 위에 네 점 A(-2), B(0), C(1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 P 의 좌표를 $P(x)$ 라고 하면
 $\overline{PA} = |x + 2|$, $\overline{PB} = |x|$, $\overline{PC} = |x - 1|$,
 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x| + |x - 1|$ 이므로
 $y = |x + 2| + |x| + |x - 1|$ 로 놓고
 $x = -2, 0, 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \begin{cases} -3x - 1 & (x < -2 \text{ 일 때}) \\ -x + 3 & (-2 \leq x < 0 \text{ 일 때}) \\ x + 3 & (0 \leq x < 1 \text{ 일 때}) \\ 3x + 1 & (x \geq 1 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

따라서, $y = |x + 2| + |x| + |x - 1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.

