1. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$의 양변에

$x = -1$을 대입하면

$$
\begin{aligned}
g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\
&= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

2. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때
$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$
$x = 9,\ y = 3$ 일 때
$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

3. 임의의 자연수에 대하여 함수 f 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$ 의 값은?

(가) $f(1)=1,\ f(2)=2$ (나) $f(x+1)=f(x+2)+f(x)$

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

(나) 에서 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$ 이므로

$f(3)=f(2)-f(1)=2-1=1$

$f(4)=f(3)-f(2)=1-2=-1$

$f(5)=f(4)-f(3)=-1-1=-2$

$f(6)=f(5)-f(4)=-2-(-1)=-1$

$f(7)=f(6)-f(5)=-1-(-2)=1$

$f(8)=f(7)-f(6)=1-(-1)=2$

$\vdots$

따라서 $f(1)=f(7),\ f(2)=f(8),\ f(3)=f(9),\ \cdots,$

$f(x)=f(x+6)$ 이고

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$ 이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$$
$$=334\{f(1)+f(2)+\cdots+f(5)+f(6)\}$$
$$\quad+f(2005)+f(2006)+f(2007)+f(2008)$$
$$=334\cdot 0+1+2+1+(-1)=3$$

4. N 을 자연수의 집합이라 할 때, 함수 $f : N \to N \cup \{0\}$ 이

(ⅰ) p 가 소수이면 $f(p)=1$
(ⅱ) $f(mn)=nf(m)+mf(n)$

을 만족시킨다고 한다. 이 때, $f(2^{2002})$ 의 값은?

① $2001 \cdot 2^{2001}$ ② $2001 \cdot 2^{2002}$ ③ $2002 \cdot 2^{2001}$

④ $2002 \cdot 2^{2002}$ ⑤ $2003 \cdot 2^{2001}$

해설

$f(mn)=nf(m)+mf(n)$ 에서 양변을 mn 으로 나누면

$$\frac{f(mn)}{mn}=\frac{f(m)}{m}+\frac{f(n)}{n}$$

$$\frac{f(2^{2002})}{2^{2002}}=\frac{f(2)}{2}+\frac{f(2^{2001})}{2^{2001}}$$

$$=\frac{1}{2}+\left\{\frac{f(2)}{2}+\frac{f(2^{2000})}{2^{2000}}\right\}$$

$$\vdots$$

$$=2002\cdot\frac{1}{2}$$

$\therefore f(2^{2002})=2002 \cdot 2^{2001}$

5. 두 함수 $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = -x + 5$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$이 성립할 때 상수 a의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$에서

$f(g^{-1}(a)) = 1\ f(1) = 1$이므로

$\therefore g^{-1}(a) = 1$에서 $a = g(1) = 4$

6. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f\circ g)(x) = 2x-3, h(x) = 2x+1$ 을 만족할 때, $\left(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}\right)(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(f\circ g)^{-1}(3) = a$ 로 놓으면 $(f\circ g)(a) = 3$

$2a-3 = 3$ 에서 $a = 3$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(3) = 3$

$\therefore \left(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}\right)(3) = (h^{-1}\circ(f\circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f\circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$

$h^{-1}(3) = b$ 놓으면 $h(b) = 3$

$2b+1 = 3$

$\therefore b = 1$

$\therefore \left(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}\right)(3) = h^{-1}(3) = 1$

7. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \dfrac{1}{x}+1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

일 때, $(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\dfrac{1}{k_1} + 1 = 5$

$\therefore\ k_1 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ f(f(a)) = \dfrac{1}{4}$

$f(a) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = k_2$ 라 하면 $f(k_2) = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4} < 1$ 이므로 $k_2 \geq 1$, $\dfrac{1}{k_2+1} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ k_2 = 3$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{a} + 1 = 3,\ a = \dfrac{1}{2}$

8. 함수 $f(x)=x^2-4x+6(x\geq 2)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프의 교점과 같다.

$y=x^2-4x+6$과 $y=x$를 연립하면

$x^2-5x+6=0,\ (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore x=2,\ y=2$ 또는 $x=3,\ y=3$

즉, 두 교점은 점 $(2,\ 2),\ (3,\ 3)$이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

9. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

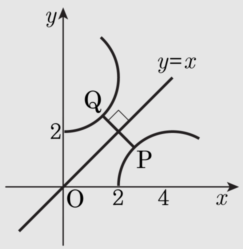
$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

10. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.
$f(x) = \sqrt{x-2}$ 라 하면 $y^2 = x-2$
$\therefore\ x = y^2 + 2$
위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$
$\therefore\ f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$
한편, 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로
직선 $y = x$에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은
선분 PQ와 직선 $y = x$가 수직을 이룰 때이다.
동점 P , Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a,\ a^2+2)$ 라 놓고
직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|\,a-(a^2+2)\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$\dfrac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{8}$ 이므로

두 점 P, Q 사이의 거리의 최소값은

$$\therefore\ \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

11. 함수 $y = |x-2| + |x+1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 3개　　④ 4개　　⑤ 5개

해설

$y = |x-2| + |x+1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x-2) - (x+1) = -2x + 1$$

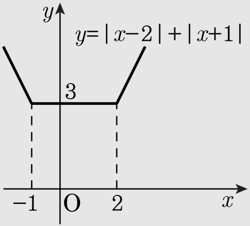
ii) $-1 \le x < 2$ 일 때,

$$y = -(x-2) + (x+1)$$

iii) $x \ge 2$ 일 때.

$$y = (x-2) + (x+1) = 2x - 1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 4 개다.



12. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서

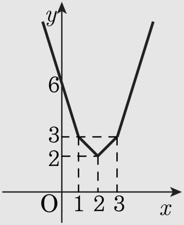
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1+x-2+x-3 = 3x-6$

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1+x-2-(x-3) = x$

(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2)-(x-3) = -x+4$

(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)-(x-2)-(x-3) = -3x+6$

따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2,\ n = 2$

$\therefore mn = 4$

13. 수직선 위에 네 점 A(-2), B(0), C(1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라고 하면
$\overline{\mathrm{PA}}=|x+2|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|x|$, $\overline{\mathrm{PC}}=|x-1|$,
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x|+|x-1|$ 이므로
$y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 로 놓고
$x=-2,\ 0,\ 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\begin{cases}-3x-1 & (x<-2\text{일 때})\\ -x+3 & (-2\le x<0\text{일 때})\\ x+3 & (0\le x<1\text{일 때})\\ 3x+1 & (x\ge 1\text{일 때})\end{cases}$$

따라서, $y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.