1. $a,\ b$ 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

> Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.
>
> Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$
>
> Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.
>
> Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$

$$= a + 1 - (2 - a)$$

$$= 2a - 1 \neq 3$$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0,\ a \geq 0$ 이다.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$$

$$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$$

$\therefore\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

2. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2(x, y\text{는실수})$
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

3. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

4. $i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+99i^{99}+100i^{100}$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② 5050 ③ $50+50i$

④ $50-50i$ ⑤ $-50+50i$

해설

$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, i^6=-1\cdots\cdots$

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+99i^{99}+100i^{100}$

$=i-2-3i+\cdots\cdots-99i+100$

$=(1-3)+(5-7)+\cdots+(97-99)\}\,i+$

$(-2+4)+(-6+8)+\cdots+(-98+100)\}$

$=(-2\times25)i+(2\times25)$

$=50-50i$

5. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$

$=f(i^2)+f((-i)^2)$

$=f(-1)+f(-1)$

$=0$

6. $f(x) = \dfrac{x}{1-i}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2　② $-1+i$　③ -1

④ $-1-i$　⑤ 2

해설

$f(1+i) = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$g(1-i) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= (i)^{2006} + (-i)^{2007} \\ &= i^2 + (-i)^3 \ (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

7. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

> ㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$
>
> ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$
>
> ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠　　② ㉠ , ㉡　　③ ㉠ , ㉢
④ ㉡ , ㉢　　⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ :$\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3-5i}}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3+5i}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

8. $x=\frac{3+i}{2}$ 일 때, $p=2x^3-2x^2-5x+3$ 의 값을 구하면?

① $2+i$ ② $2-i$ ③ $-2+i$

④ $-4+i$ ⑤ $4+i$

해설

$x=\frac{3+i}{2}$ 에서 $2x-3=i$

$(2x-3)^2=i^2$ 에서 $2x^2-6x+5=0$

나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면

$2x^3-2x^2-5x+3$

$=(2x^2-6x+5)(x+2)+2x-7$

$=2x-7$

$=2\left(\frac{3+i}{2}\right)-7$

$=-4+i$

9. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= 3x \\ &= \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)\end{aligned}$$