

1. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
(2) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = 0$

- ① (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ② (1) $\frac{3 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ④ (1) $\frac{1 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4 \pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
 $\therefore 5x^2 - 8x + 4 = 0$
 $\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{5} = \frac{4 \pm 2i}{5}$

(2) $x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

2. x 에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의 합은?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은

$D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - (m+3)(2m-1) = 0$$

$$4m^2 - (2m^2 + 5m - 3) = 0$$

$$2m^2 - 5m + 3 = 0$$

$$(m-1)(2m-3) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

3. 이차방정식 $x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a \geq 1$

③ $-1 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 1 - (2 - a) > 0$$

$$1 - 2 + a > 0$$

$$\therefore a > 1$$

4. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8

② -4

③ -2

④ 5

⑤ 2

해설

$$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$$

$$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$$

$$37 + 12k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{37}{12}$$

따라서 최대정수는 -4이다.

5. $2x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} \times (-2) = 1$$

6. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$$a=2, b'=-2, c=3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

7. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0 \cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0 \cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a \neq 0, a \neq 1$ 일 때, $x = \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0이다.

8. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-4)=3, -2x=-5$
 $\therefore x=\frac{5}{2}$
ii) $3 \leq x < 4$ 일 때
 $(x-3)-(x-4)=2, 0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $x \geq 4$ 일 때
 $x-3+x-4=2, 2x=9$
 $\therefore x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

9. 연산 $*$ 를 $a * b = ab + 2(a + b)$ 라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β 라 한다. 이때, $|\alpha - \beta|$ 의 값은?

$$(3x * x) - (3 * x) + \{(-1) * 2\} = 0$$

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서
 $3x * x = 3x \cdot x + 2(3x + x) = 3x^2 + 8x$, $3 * x = 3 \cdot x + 2(3 + x) = 5x + 6$,
 $-1 * 2 = (-1) \cdot 2 + 2(-1 + 2) = -2 + 2 = 0$
주어진 식은 $3x^2 + 8x - (5x + 6) + 0 = 0$
 $3x^2 + 3x - 6 = 0$ 에서 $3(x + 2)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1 \quad \therefore |\alpha - \beta| = 3$

10. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\quad\text{가}\quad)$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\quad\text{나}\quad)}{4a^2}$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\quad\text{다}\quad)}{2a}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}, b^2-4ac, \pm\sqrt{b^2-4ac}$
- ② $\frac{b}{2a}, \sqrt{b^2-4ac}, b^2-4ac$
- ③ $\frac{b}{2a}, b^2-4ac, \pm\sqrt{b^2-4ac}$
- ④ $\frac{b}{4a^2}, \sqrt{b^2-4ac}, b^2-4ac$
- ⑤ $\frac{b}{a}, \left(\frac{b}{2}\right)^2-ac, \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$
 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

11. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

- ① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
- ② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
- ③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

12. 다음 방정식을 풀면?

$$(2 - \sqrt{3})x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$$

① $x = -1$ 또는 $-\sqrt{3}$

② $x = -1$ 또는 $-2 + \sqrt{3}$

③ $x = -1$ 또는 $2 + \sqrt{3}$

④ $x = 1$ 또는 $2 - \sqrt{3}$

⑤ $x = 1$ 또는 $2 + \sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})x^2 + (2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})x - (2 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x - (2 + \sqrt{3}) = 0$$

$$(x + 1) \{x - (2 + \sqrt{3})\} = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 + \sqrt{3}$$

13. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$$

$$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$$

$$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$$

$$(x-1)\{x-(\sqrt{3}+1)\}=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}+1$$

14. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2 + (1+i)x - 2 = 0$$

- ① $x = -1$ 또는 $x = -i$ ② $x = -1$ 또는 $x = -1-i$
③ $x = -1$ 또는 $x = -1+i$ ④ $x = 1$ 또는 $x = -1-i$
⑤ $x = 1$ 또는 $x = -1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$ 를 곱하면
 $(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)^2x - 2(1+i) = 0$

$$2x^2 + 2ix - 2(1+i) = 0$$

$$(x-1)\{x+(1+i)\} = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -1-i$$

15. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

16. 방정식 $\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x - \frac{1}{2}\right] - 7 = 0$ 의 해 $a \leq x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right] - 1 \text{ 이므로}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x + \frac{1}{2}\right] - 4 = 0$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = 4 \text{ 또는 } \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 이다}$$

따라서 구하는 값은

$$\therefore a + b + c + d = 6$$

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 \pm i$ 를 대입하여 정리하면
 $1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0$ 과
 $a + b + (a + 2)i = 0$ 이다.
위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서
 $a = -2, b = 2$ 이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켈레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$
근과 계수의 관계에서
 $-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$
 $b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$

18. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

19. 구간 $0 < x < 5$ 에서 $x = \frac{1}{x - [x]}$ 를 만족시키는 x 의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① 2개
- ② 3개
- ③ 4개
- ④ 5개
- ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$ 이므로 x 는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$ 를 곱하면
 $x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$ 일 때 $[x] = 0, x^2 - 1 = 0$
 $\therefore x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$ 에 속하지 않는다.
 $\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1, x^2 - x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $1 < x < 2$ 이므로 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$
 $\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
 $2 < x < 3$ 이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$ 일 때 $[x] = 3$
 $\therefore x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
 $3 < x < 4$ 이므로 $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(v) $4 < x < 5$ 일 때 $[x] = 4$
 $\therefore x^2 - 4x - 1 = 0$
 $x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
 $4 < x < 5$ 이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x 의 개수는 4개

20. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

- 21.** a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a - b$ 는 x 의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 정삼각형 ② $a = b$ 인 이등변삼각형
③ $b = c$ 인 이등변삼각형 ④ a 가 빗변인 직각삼각형
⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

해설

a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

따라서, $a + b > 0$ 이므로 준식은 이차식이다.

준식이 완전제곱식이 되려면

$$\text{필변시 } D = 0$$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

4 정리하면 $a^2 = a^2 + b^2 = 0$

정리하면, $c^2 - a^2 = b^2$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

22. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면
 $2x^2 + (y - 1)x - y^2 + 2y + k$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y - 1)^2 - 4 \times 2(-y^2 + 2y + k)$$
$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
 $(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a- \quad b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

23. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{\quad}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20,$

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a 는 5

24. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

25. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$ 가 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k 의 값을 정하면?

- ① -2 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x 에 관해 식을 정리하면
 $f(x) = x^2 + (1 - y)x + (-6y^2 + 7y + k)$
 $f(x)$ 가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
 $D = (1 - y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$ 가 완전제곱식이어야 한다.
 $D = 25y^2 - 30y + (1 - 4k)$ 에서
 $\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1 - 4k) = 0$
 $\therefore k = -2$

26. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $n(n+1)x^2 - x + 2006 = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라할 때, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2006}) + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{2006})$ 의 값은?

- ① $\frac{2004}{2006}$ ② $\frac{2005}{2006}$ ③ $\frac{2006}{2007}$ ④ $\frac{2007}{2008}$ ⑤ $\frac{2007}{2009}$

해설

$n(n+1)x^2 - x + 2006 = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로

$$\alpha_n + \beta_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

준식 = $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_{2006} + \beta_{2006})$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2007} = \frac{2006}{2007}$$

27. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

28. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 에서 한 근만이 양이기 위한 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$

② $0 < a \leq 1$

③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0, \beta < 0$ 일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$\therefore -2 < a < 2$

(ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ 일 때,

$\alpha + \beta = a > 0, \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$

$\therefore a = 2$

(i), (ii) 에서 $-2 < a \leq 2$

29. $|1-|1-|1-x|| = x-1$ 을 만족시키는 x 의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M 이라 할 때, $m+M$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x|| \geq 0$
 $\therefore x \geq 1$
 $x \geq 1$ 이면 $|1-x| = x-1$
 $\therefore |1-|1-x|| = |1-(x-1)| = |2-x|$
 $1 \leq x \leq 2$ 이면
 $|2-x| = 2-x$ 이므로
(좌변) $= |1-(2-x)|$
 $= |x-1|$
 $= x-1 = (\text{우변})$
 $\therefore 1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x
 $\therefore m=1, M=2, \quad M+m=3$

30. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ 를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$ 의 한 근을 복소수 α 라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

☐ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	☐ $\alpha + \bar{\alpha} = -1$
☐ $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$	☐ $\alpha^2 = \bar{\alpha}$

- ① ☐ , ☐ , ☐

② ☐ , ☐ , ☐ , ☐

③ ☐ , ☐ , ☐ , ☐

④ ☐ , ☐ , ☐ , ☐

☒ ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , ☐

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak, \ c = bk, \ a = ck$
변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$
 $abc \neq 0$ 이므로 $k^3 = 1$
 $\therefore k = 1 \quad \therefore a = b = c$
 $cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$
한 근을 α 라 하면 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$ 이다
☐ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$
☐ $\alpha + \bar{\alpha} = -1$
☐ $\alpha\bar{\alpha} = 1, \ \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$
☐ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근을 구해보면
 $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
 $\therefore \alpha^2 = \bar{\alpha}$

31. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

- ① $(p + q)^2$
- ② $(2p + q)^2$
- ③ $(p - 2q)^2$
- ④ $(p - q)^2$
- ⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \beta = -n, \alpha\beta = p, \gamma + \delta = -n, \gamma\delta = q$ 이므로
주어진 식 $= \{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$
 $= \{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$
 $= (\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$
그런데, $\gamma^2 + n\gamma + q = 0$ 에서
 $\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$
또, $\delta^2 + n\delta + q = 0$ 에서
 $\delta^2 + n\delta + p = p - q$
따라서, 주어진 식 $= (p - q)^2$

32. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$ 이 허근 α 를 갖고, α^3 이 실수일 때, m 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 3
- ④ 0, 3
- ⑤ 0, 1, 3

해설

α^3 이 실수이므로 $\bar{\alpha}^3 = \alpha^3$,
 $(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) = 0$
 α 는 허수이므로 $\alpha \neq \bar{\alpha}$
 $\therefore \alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 = 0 \dots\dots (i)$
근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \bar{\alpha} = m - 1, \alpha\bar{\alpha} = m + 1$
(i)은 $(\alpha + \bar{\alpha})^2 - \alpha\bar{\alpha} = 0, (m - 1)^2 - (m + 1) = 0$
 $m^2 - 3m = m(m - 3) = 0$
 $\therefore m = 0, 3$
이차방정식 $x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$ 이
허근을 가지므로 $D = (m - 1)^2 - 4(m + 1) < 0$
 $m = 0, 3$ 은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

33. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha, f(1) = 1$ 을 만족시키는 이차식 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

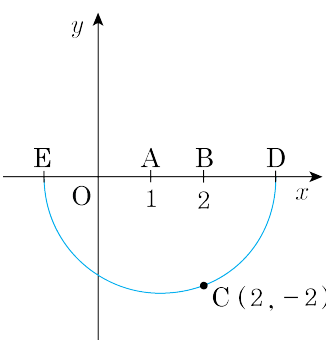
④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$ 는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
 $\therefore f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 에서
즉, α, β 는 $f(x) = 1 - x$ 의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$ 은
 $(x - \alpha)(x - \beta)$ 를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$ 가 이차식이므로
 $f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
 $f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1,$
 $f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
 $\therefore a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

34. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



- ① A ② B ③ C
 ④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$ 이므로
 $\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.
 $\therefore$ 점 D의 좌표는 $(1 + \sqrt{5}, 0)$,
 점 E의 좌표는 $(1 - \sqrt{5}, 0)$ 이다.
 그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지나므로
 $x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
 여기서, a, b, c 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$
 ($\therefore$ 켈레근) 또한 방정식의 근이 된다.
 따라서, 그래프는 점 D($1 + \sqrt{5}, 0$)을 지난다.

35. x 의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$ 의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k 의 최솟값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 근을 α, β 라 하면

(i) 두 근이 모두 양수일 때

$$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$$

이들의 공통 범위를 구하면

$$-3 \leq k < -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,

$$\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때

$$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$$

$$\therefore k = -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$$

구하는 k 의 범위는 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢이므로

$$-3 \leq k \leq 1$$

$$\therefore \text{최솟값 } -3$$