1. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(n+i)^4 = \left\{(n+i)^2\right\}^2 = (n^2 - 1 + 2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2 - 1 + 2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n = 0$ 일 때 성립
ii) $n^2 - 1 = 0$, $n = \pm 1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

해설

$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$, $n = 0$, ± 1
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

2. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i=\sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 이면, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.
㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉣ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

① ㉡,㉢　　② ㉠,㉡,㉢　　③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
㉠ $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2+b^2$
㉡ $\alpha\beta=0$, $a^2+b^2=0$, $a=0,\ b=0$
㉢ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$
㉣ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

3. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=9$일 때, $\dfrac{z}{1+\sqrt{2}i}$ 의 실수 부분의 값은?

① -2　　② -1　　③ 2　　④ 1　　⑤ 5

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi\ \ (a,\ b$ 는 실수$)$

$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a=6\ ,\ a=3$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=9\ ,\ b=0$

$z=3$

$\dfrac{z}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{3}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}i)}{3}=1-\sqrt{2}i$

$\therefore$ 실수부 : 1

4. $a < 0$, $b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}i$

해설

① $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a}^2\sqrt{b}^2$
$= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
$= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
$= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
$= -\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

5. 가로와 세로의 길이의 합이 20인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값은?

① 90 ② 92 ③ 98 ④ 100 ⑤ 112

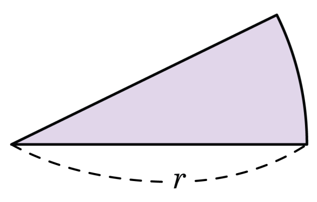
해설

가로를 x, 세로를 $20-x$라 하자.

$y = x(20-x)$
$= -x^2 + 20x$
$= -(x^2 - 20x)$
$= -(x^2 - 20x + 100 - 100)$
$= -(x-10)^2 + 100$

따라서 y의 최댓값은 100이다.

6. 둘레의 길이가 20cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?

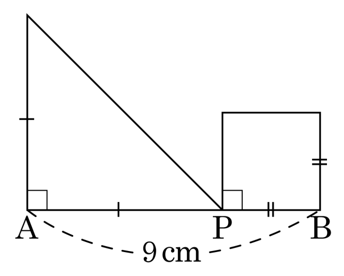


① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

부채꼴의 호의 길이는 $l = (20 - 2r)\text{cm}$
부채꼴의 넓이를 y라 하면
$y = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = (10 - r)r = -(r - 5)^2 + 25$
따라서 꼭짓점이 $(5, 25)$ 이므로 반지름의 길이가 $5\,\text{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 25cm^2를 가진다.

7. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

8. 연립방정식 $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ 의 근 x, y가 $xy = a$, $x + y = b$를 만족할 때, $a - b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠식을 정리해서
$y = 2x - 5$ 를 ㉡식에 대입한다.
$x^2 + (2x - 5)^2 = 25$,
$5x^2 - 20x = 0$, $x(x - 4) = 0$
$\therefore\ x = 0,\ 4$
ⅰ) $x = 0$ 일 때, $y = -5$
$\therefore a = 0,\ b = -5$
$\therefore a - b = 5$
ⅱ) $x = 4$ 일 때, $y = 3$
$\therefore a = 12,\ b = 7$
$\therefore a - b = 5$

9. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하면 ㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$일 때 ;

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$일 때 ;

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0, -\frac{1}{3}$

$\therefore = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

11. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

12. 연립방정식 $xy=z,\ yz=x,\ zx=y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개
④ 8개　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$
(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,
$xy = 1,\ x = y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$
(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면
$xy = -1,\ x = -y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

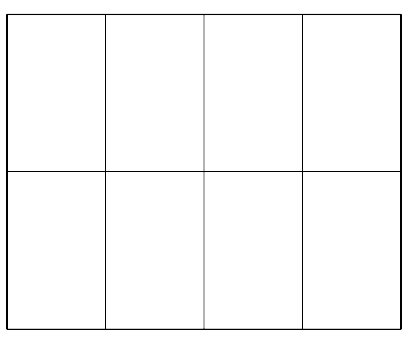
13. x에 대한 두 이차방정식 $x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$의 공통근이 2이므로 $x=2$를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.
$2^2-2a+10=0$, $2^2+2+b=0$
$\therefore\ a=7,\ b=-6$
이 때, $x^2-7x+10=0$에서
$(x-2)(x-5)=0$이므로 $x=2,\ 5$
또, $x^2+x-6=0$에서
$(x-2)(x+3)=0$이므로 $x=2,\ -3$
따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은
$5,\ -3$이므로 두 근의 합은 2이다.

14. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 $80\,\mathrm{m}^2$ 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)



① 16 m　② 17 m　③ 18 m　④ 19 m　⑤ 20 m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.
$3x + 5y = 70$
$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$
$\therefore$ 가로+세로$= 18$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면
$x(-x+2a)=a$
$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$
$\therefore$ $a=0$ 또는 1 그런데
a 는 양의실수 이므로
$a=1$

16. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

17. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \ge \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

18. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x, 3점문항을 y,
4점문항을 z라 하자
$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡
㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$
$\therefore$ $x = 10$이면 $z = 0$
$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11문항

19. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2} \}^{n} + \{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2} \right\}^{n}$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^{n} + \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^{n} + \left(-\frac{1}{i}\right)^{n} = (-i)^{n} + i^{n}$$

i^{n} 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1+1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i+i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1-1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i-i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

20. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

21. $x,\ y$ 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x + y$

④ $x - y$　　⑤ $2x + y$

해설

$z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = 3$ 이면 $\bar{z} = \frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \\ &= x\end{aligned}$$

22. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1+\sqrt{3}i$

$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$

$= 4$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$

$= 4 \ (\because \ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

23. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 초 후

▷ 정답 : 4초 후

해설

$y = 40x - 5x^2$
$y = -5(x-4)^2 + 80$
$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

24. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 6y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
$x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$ ⋯⋯ ㉠
이 때, x 가 실수이므로
$\frac{D}{4} = (1-y)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$
$y^2 - 4y + 4 \leq 0,\ (y-2)^2 \leq 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2 = 0$
$\therefore\ y = 2$ ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$
$\therefore\ x = 1\ \ \therefore\ \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$
$x^2 + 2(1-y)x + (1-y)^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$
$\therefore\ (x+1-y)^2 + (y-2)^2 = 0$ $x,\ y$ 가 실수이므로 $x + 1 - y = 0,\ y - 2 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 2$
$\therefore\ \frac{y}{x} = 2$

25. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 x, y의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$$

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$ 의 양변에 xy 를 곱하면

$2y+3x=xy$, $xy-3x-2y=0$

$\therefore\ (x-2)(y-3)=6$

이 때, x, y 는 양의 정수이므로

$x-2\ge -1$, $y-3\ge -2$ 인 정수이다.

따라서, $x-1$, $y-3$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x-2$	1	2	3	6
$y-3$	6	3	2	1

그러므로 구하는 x, y 의 값은 $\begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$ 또는

$\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=4\end{cases}$