

1. 복소수 $z = a + bi$, $w = b + ai$ (a, b 는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $\bar{z}$, $\bar{w}$ 는 각각 z, w 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z} = w$

② $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{z}{w}$

③ $z \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot w$

④ $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ $i(\bar{z} + \bar{w}) = z + w$

해설

① : $i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② : ①에서 $\bar{z} = -iw$ ㉠

같은 방법으로 $\bar{w} = -iz$ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{-iz}{-iw} = \frac{z}{w}$

③ : ㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

$\therefore$ 좌변 $\neq$ 우변

④ : ②에서 $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ : $i(\bar{z} + \bar{w}) = i\bar{z} + i\bar{w} = w + z = z + w$

2. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

- ☐㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.

☐㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다.

☐㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다.

☐㉣ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다.

☐㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$
㉠ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 실수
㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$
 $\therefore z = bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)
㉢ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow$ 실수
㉣ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$
순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우
 $z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.
㉤ $\frac{1}{z} = c + di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{\overline{1}}{\bar{z}} = c - di$ 이므로 참

3. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다)

㉠ $z + \bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z - \bar{z})^2$
㉤ $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$	㉦ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥, ㉦

해설

$z = a + bi$ 라 하자 $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$

㉠ $z + \bar{z} = 2a$

㉡ $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

㉢ $(z - \bar{z})^2 = (2bi)^2 = -4b^2$

㉤ $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} - \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{-2bi}{a^2 + b^2}$

㉦ $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2}$

4. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ = \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ = (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2 \\ = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※방정식에 익숙한 학생들은

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 바로 } z^2 + z + 1 = 0 \text{ 와 } z^3 = 1 \text{ 을 도출할 수}$$

있을 것이다.

$$(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$$

$$= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2$$

$$= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3$$

$$= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$

5. $a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

② 0

③ 1

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $-1 + \sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2a + 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$$4a^2 + 4a + 1 = -3 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

양변에 $a - 1$ 를 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$$

$$\therefore a^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = a^3 a^2 + a^3 - 1$$

$$= a^2$$

$$= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0)$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

6. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15} = 1$

㉢ $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$ 일 때, $z\bar{z} = \frac{7}{3}$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ : $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, $\alpha^3 = 1$
 $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15}$
 $= 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^2) + \cdots + \alpha^{15} = \alpha^{15}$
 $= (\alpha^3)^5 = 1$ ($\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$)

㉢ : $\bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, $\alpha + \bar{\alpha} = -1, \alpha\bar{\alpha} = 1$
 $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} + 3}{2\bar{\alpha} + 1}$
 $z\bar{z} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + 3(\alpha + \bar{\alpha}) + 9}{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1} = \frac{1 - 3 + 9}{4 - 2 + 1} = \frac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

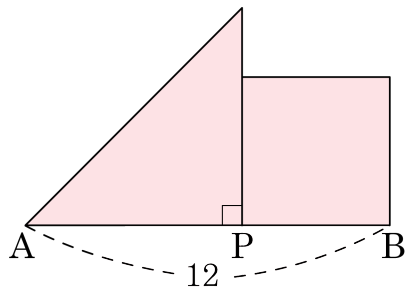
$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i, \alpha + 3 = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1} = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$
 $= -\frac{5i - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z \cdot \bar{z} = \frac{\sqrt{3 - 5i}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3 + 5i}}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

7. 길이가 12 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 정사각형과 직각이등변 삼각형을 만들려고 한다. 이 넓이의 합이 최소가 될 때, 선분 $\overline{PB}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{PB} = x$ 라고 두면 $\overline{AP} = 12 - x$ 이다. 직각삼각형의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2} \times (12 - x) \times (12 - x) = \frac{1}{2}x^2 - 12x + 72 \text{ 이다.}$$

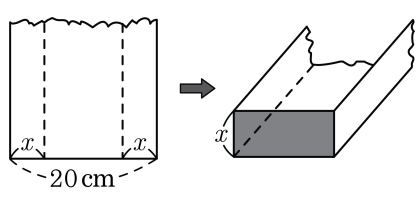
정사각형의 넓이는 x^2 이다.

$$\text{합을 구하면 } x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 72 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 72 = \frac{3}{2}(x^2 -$$

$$8x + 16) - 24 + 72 = \frac{3}{2}(x - 4)^2 + 48 \text{ 이다.}$$

따라서 $x = 4$ 일 때 최솟값을 가진다.

8. 그림과 같이 너비가 20 cm 인 철판의 양쪽을 접어 물받이를 만들려고 한다. 색칠한 부분의 넓이가 최대가 되게 하려면 높이를 몇 cm 로 해야 하는지 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 5 cm

해설

색칠한 부분의 넓이를 y 라 하면
 $y = x(20 - 2x)$
 $= -2x^2 + 20x$
 $= -2(x - 5)^2 + 50$
따라서 높이는 5 cm로 해야한다.

9. 가로 길이가 8 m , 세로 길이가 6 m 인 직사각형 모양의 정원을
가로의 길이를 x m 만큼 줄이고 세로의 길이를 x m 만큼 늘여서 새로운
정원을 만들려고 한다. 새로운 정원의 넓이의 최댓값과 그 때의 x 의
값을 구하여라.
- ▶ 답 :
▶ 답 : $\underline{\text{m}^2}$
▷ 정답 : $x= 1$
▷ 정답 : 최댓값 : $49 \underline{\text{m}^2}$

해설

$x = 1$ 일 때 넓이의 최댓값 : 49 m^2
넓이를 y 라 하면
 $y = (8 - x)(6 + x)$
 $y = -x^2 + 2x + 48$
 $y = -(x^2 - 2x + 1) + 49$
 $y = -(x - 1)^2 + 49$
 $x = 1$ 일 때 넓이의 최댓값은 49 m^2 이다.

10. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 2 : 3 : 4 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

① 2 : 3 : 4

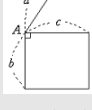
② 4 : 3 : 7

③ 3 : 1 : 4

④ 4 : 3 : 6

⑤ 4 : 5 : 6

해설



꼭짓점 A의 각면은 넓이비가 2 : 3 : 4 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \dots ① \\ bc = 3k^2 \dots ② \\ ca = 4k^2 \dots ③ \end{cases}$$

(k는 양의 상수)

$$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2, (abc)^2 = 24k^6$$

$$\therefore abc = 2\sqrt{6}k^3 \dots ④$$

$$④ \div ② \text{ 하면 } a = \frac{2}{3}\sqrt{6}k$$

$$④ \div ③ \text{ 하면 } b = \frac{\sqrt{6}}{2}k$$

$$④ \div ① \text{ 하면 } c = \sqrt{6}k$$

$$\therefore a : b : c = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : 1 = 4 : 3 : 6$$

11. 2년 전의 A 와 B 의 임금은 서로 같았으나 그 해 A 의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B 의 임금은 2년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 $a\%$ 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

2년 전 두 사람의 임금을 k 원이라면

올해 A 와 B 의 임금은 각각

$$A : k(1 + 0.08)(1 + 0.47)$$

$$B : k \left(1 + \frac{a}{100} \right)^2$$

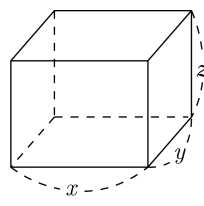
따라서

$$(100 + a)^2 = 108 \times 147 = 3 \times 3 \times 6 \times 6 \times 7 \times 7$$

$$\therefore 100 + a = 126$$

$$\therefore a = 26$$

12. 다음 그림과 같이 가로 길이, 세로 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8, 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



- ① 53 ② 56 ③ 59
 ④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12} = 8 \Rightarrow x+y+z = 24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12} - 8^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 204$$

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = 186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6} = \frac{xy+yz+zx}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

13. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$m = -1, 7$$

14. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 5, \quad k = 7$

$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$

$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$

$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$

$\therefore 7 + 6 - 3 - 2 = 8$