1. 복소수 $z = a + bi,\ w = b + ai$ ($a,\ b$는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\bar{z},\ \bar{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z} = w$

② $\dfrac{\bar{w}}{\bar{z}} = \dfrac{z}{w}$

③ $z \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot w$

④ $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ $i(\bar{z} + \bar{w}) = z + w$

해설

① : $i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② :①에서 $\bar{z} = -iw$ ······ ㉠

같은 방법으로 $\bar{w} = -iz$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\bar{w}}{\bar{z}} = \dfrac{-iz}{-iw} = \dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ : $i(\bar{z} + \bar{w}) = i\bar{z} + i\bar{w} = w + z = z + w$

2. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

3. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\dfrac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠

② ㉠,㉡

③ ㉠,㉡,㉢

④ ㉠,㉡,㉢,㉣

⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}-\dfrac{a+bi}{a^2+b^2}=\dfrac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

4. 복소수 $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$
$\rightarrow 4z^2+4z+4=0$
$\rightarrow z^2+z+1=0$
$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$
$\rightarrow z^3-1=0$
$\rightarrow z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$
$=10z^4+12x^3+10z^2$
$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$
$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$
$=0+2$
$=2$

5. $a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2a+1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2+4a+1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a^2+a+1=0$

양변에 $a-1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1) = 0 \Leftrightarrow a^3-1=0$

$\therefore \ a^3 = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3a^2 + a^3 - 1 \\ &= a^2 \\ &= -a-1 (\because a^2+a+1=0) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

6. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$ ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$ ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠　　② ㉠ , ㉡　　③ ㉠ , ㉢

④ ㉡ , ㉢　　⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ $:\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ $:(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ $:\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

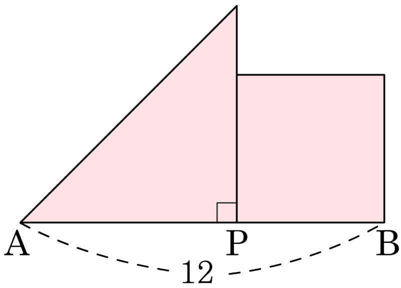
$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

7. 길이가 12 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 정사각형과 직각이등변 삼각형을 만들려고 한다. 이 넓이의 합이 최소가 될 때, 선분 $\overline{\mathrm{PB}}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{\mathrm{PB}} = x$ 라고 두면 $\overline{\mathrm{AP}} = 12 - x$ 이다. 직각삼각형의 넓이를 구하면

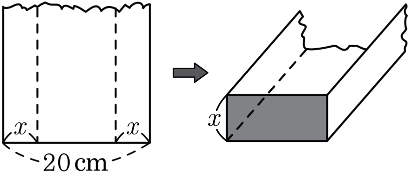
$\frac{1}{2} \times (12 - x) \times (12 - x) = \frac{1}{2}x^2 - 12x + 72$ 이다.

정사각형의 넓이는 x^2 이다.

합을 구하면 $x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 72 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 72 = \frac{3}{2}(x^2 - 8x + 16) - 24 + 72 = \frac{3}{2}(x - 4)^2 + 48$ 이다.

따라서 $x = 4$ 일 때 최솟값을 가진다.

8. 그림과 같이 너비가 20 cm 인 철판의 양쪽을 접어 물받이를 만들려고 한다. 색칠한 부분의 넓이가 최대가 되게 하려면 높이를 몇 cm 로 해야 하는지 구하여라.



▶ **답 :** ________ cm

▷ **정답 :** 5 cm

해설

색칠한 부분의 넓이를 y라 하면

$$y = x(20 - 2x)$$
$$= -2x^2 + 20x$$
$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 높이는 5 cm로 해야한다.

9. 가로의 길이가 $8\,\mathrm{m}$, 세로의 길이가 $6\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 정원을 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 만큼 줄이고 세로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 만큼 늘여서 새로운 정원을 만들려고 한다. 새로운 정원의 넓이의 최댓값과 그 때의 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 : $\underline{\quad\mathrm{m}^2}$

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : 최댓값 : $49\,\underline{\mathrm{m}^2}$

해설

$x = 1$ 일 때 넓이의 최댓값 : $49\,\mathrm{m}^2$

넓이를 y 라 하면

$y = (8 - x)(6 + x)$

$y = -x^2 + 2x + 48$

$y = -(x^2 - 2x + 1) + 49$

$y = -(x - 1)^2 + 49$

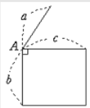
$x = 1$ 일 때 넓이의 최댓값은 $49\,\mathrm{m}^2$ 이다.

10. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 $2:3:4$ 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

① $2:3:4$ ② $4:3:7$ ③ $3:1:4$

④ $4:3:6$ ⑤ $4:5:6$

해설



꼭지점 A 의 각면은 넓이비가 $2:3:4$ 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \cdots ① \\ bc = 3k^2 \cdots ② \\ ca = 4k^2 \cdots ③ \end{cases}$$

(k 는 양의 상수)

$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2$, $(abc)^2 = 24k^6$

$\therefore\ abc = 2\sqrt{6}k^3 \cdots ④$

④÷ ② 하면 $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}k$

④÷ ③ 하면 $b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}k$

④÷ ① 하면 $c = \sqrt{6}k$

$\therefore\ a:b:c = \dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{2} : 1 = 4:3:6$

11. 2년 전의 A와 B의 임금은 서로 같았으나 그 해 A의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B의 임금은 2년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 a% 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

2년 전 두 사람의 임금을 k원이라면

올해 A와 B의 임금은 각각

A : $k(1+0.08)(1+0.47)$

B : $k\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^2$

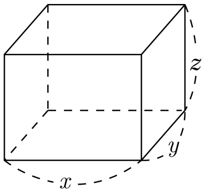
따라서

$(100+a)^2 = 108\times 147 = 3\times3\times6\times6\times7\times7$

$\therefore\ 100+a = 126$

$\therefore a = 26$

12. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53 ② 56 ③ 59

④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12} = 8 \Rightarrow x+y+z = 24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12} - 8^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 204$$

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} = 186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6} = \frac{xy+yz+zx}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

13. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라면

$\alpha+\beta=1-m\cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ ($\alpha,\ \beta$는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore\ \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

14. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots ① \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore \ (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$x^2-kx+k+3=0$ 의 두 근을 α,β 라 하자

$\alpha+\beta=k, \alpha\beta=k+3 \rightarrow \ \alpha+\beta+3=\alpha\beta$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=3$

$(\alpha-1)(\beta-1)=4$ α,β 는 정수이므로

$1\times4 \Rightarrow \alpha=2,\ \beta=5, \quad k=7$

$2\times2 \Rightarrow \alpha=3,\beta=3, \quad k=6$

$-1\times-4 \Rightarrow \alpha=0,\beta=-3, \quad k=-3$

$-2\times-2 \Rightarrow \alpha=-1,\beta=-1, \quad k=-2$

$\therefore\ 7+6-3-2=8$