1. $x^2 \neq 1$ 이고, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때, $f(-x)$ 를 $f(x)$ 를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$　　② $-f(x)$　　③ $\{f(x)\}^2$

④ $\dfrac{1}{f(x)}$　　⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

2. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면
$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$
$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$
위 식은 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ b=1$
이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ −1 ④ −2 ⑤ −3

해설

$f(2)=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$

$=\dfrac{1+3}{1-3}=-2$

$f(3)=\dfrac{1+f(2)}{1-f(2)}$

$=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$

$f(4)=\dfrac{1+f(3)}{1-f(3)}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

$f(5)=\dfrac{1+f(4)}{1-f(4)}$

$=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

4. 공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$
즉 $x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$
$x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
X는 집합 $\{-2,\ 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.
따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

5. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

7. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 24개

해설

a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

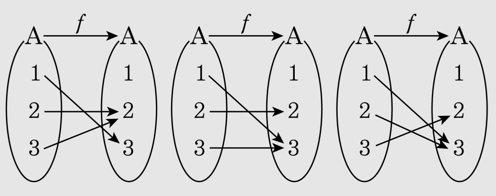
8. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

> Ⅰ. $f(1) = 3$
> Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

9. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
$\therefore \ y = (f \circ f)(x) = 2$

10. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f,\ g$가 $f(x) = ax + b,\ g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60　　② 55　　③ 51　　④ 48　　⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$
$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$
$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로
$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0(\because a \neq 0)$
즉, $f(x) = x$이므로
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 일 때, $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$ ② $2x-2$ ③ $4x-2$
④ $6x-3$ ⑤ $8x-3$

해설

$\dfrac{3x+1}{2}=t$ 라 하면 $2t=3x+1$

$\therefore x=\dfrac{2t-1}{3}$

$f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 에서

$f(t)=6\cdot\dfrac{2t-1}{3}-5=4t-7$

$\therefore f(2x+1)=4(2x+1)-7=8x-3$

13. 두 함수 $f(x)=4x-3,\ g(x)=2x+1$ 에 대하여 $h\circ g=f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=x+4$ ② $h(x)=2x-5$ ③ $h(x)=3x+2$
④ $h(x)=3x+5$ ⑤ $h(x)=5x+3$

해설
$h(x)=ax+b$ 라고 놓으면
$h\circ g=f$ 에서 $a(2x+1)+b=4x-3$
$\therefore\ 2a=4,\ a+b=-3$
이것을 풀면 $a=2,\ b=-5$
따라서 $h(x)=2x-5$

14. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (n\text{이 2의 배수일 때}) \\ n+1 & (n\text{이 2의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$ 로 정의하자.

$f=f^1,\ f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3,\ \cdots,\ f\circ f^n=f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10)=2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면

$f(10)=5$

$f^2(10)=f(f(10))=f(5)=6$

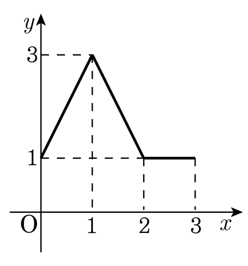
$f^3(10)=f(f^2(10))=f(6)=3$

$f^4(10)=f(f^3(10))=f(3)=4$

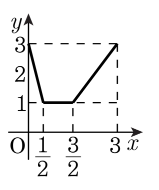
$f^5(10)=f(f^4(10))=f(4)=2$

따라서, $f^k(10)=2$ 가 되는 k 의 최솟값은 5이다.

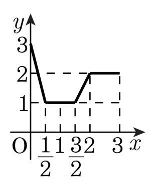
15. 함수
$y=f(x)\,(0\le x\le 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(f\circ f)\,(x)\,(0\le x\le 3)$ 의 그래프는 무엇인가?



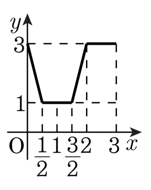
①



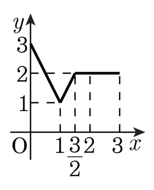
②



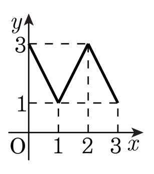
③



④



⑤



해설

$0\le x\le 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프가
$x=1$ 에 대하여 대칭이므로
$y=(f\circ f)\,(x)$ 의 그래프도
$0\le x\le 2$ 에서 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.
$y=(f\circ f)\,(x)=f\,(f(x))$ 에서
$f\,(f(0))=f(1)=3$
$f(f(1))=f(3)=1$
$f(f(2))=f(1)=3$
$f\,(f(3))=f(1)=3$
따라서, $y=(f\circ f)\,(x)$ 를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

16. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$	㉡ $y = \lvert x - 2 \rvert$
㉢ $y = x^2 - 2$	㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.
㉡ $y = \lvert x - 2 \rvert$ 에서 $y = 1$ 이면
$x = -1,\ 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.
㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
$x = \pm 2$ 이므로 일대 일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함 수를 갖지 않는다.
㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.
이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.
㉮ $x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0$ 이므로
$f(x_1) \neq f(x_2)$
㉯ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

17. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2x(x\neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\frac{x+2}{x-2}(x\neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x\neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}$ $(x\neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x\neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x\neq 1)$

해설

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2x$ 에서

$\frac{x+1}{x-1}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t+1}{t-1}$

$\therefore f(t)=\frac{2(t+1)}{t-1},\ f(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$

$y=\frac{2(x+1)}{x-1}$ 이면

$yx-y=2x+2$ 에서 $x=\frac{y+2}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-2}$ $(x\neq 2)$

18. 두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여 $\left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ g \\ &= \left(g\circ g^{-1}\right)\circ f^{-1}\circ g \\ &= f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2) &= (f^{-1}\circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$ 라고 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$4a+1=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)=-\frac{1}{2}$

19. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 $f\left(3g(x)+\frac{x-1}{x}\right)=x$ 를 만족할 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$f\left(3g(x)+\frac{x-1}{x}\right)=x$ 에서

$3g(x)+\frac{x-1}{x}=f^{-1}(x)$ 이므로

$3g(x)+\frac{x-1}{x}=g(x)$ $(\because f^{-1}=g)$

$2g(x)=-\frac{x-1}{x}$

$\therefore g(x)=-\frac{x-1}{2x}$

$\therefore g(-1)=-\frac{-1-1}{2\cdot(-1)}=-1$

해설

$f\left(3g(x)+\frac{x-1}{x}\right)=x$ 에서

$x=-1$ 을 대입하면

$f(3g(-1)+2)=-1$, $3g(-1)+2=a$ 라고 놓으면 $f(a)=-1$

$\therefore g(-1)=a$

$3g(-1)+2=a$ 에서 $3a+2=a$, $2a=-2$

$\therefore a=-1=g(-1)$

20. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

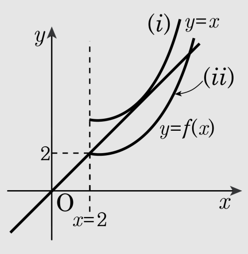
해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b + 1 = 3$
$\therefore\ b = 1$
이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서
$1 + f^{-1}(a) = 0,\ f^{-1}(a) = -1$
$\therefore\ f(-1) = a$
$\therefore\ a = 1 - (-1)^2 = 0$

21. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$　② $k < \frac{25}{4}$　③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$　⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설



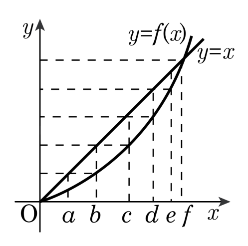
주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.
따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접할 때,
$x^2 - 4x + k = x$, $x^2 - 5x + k = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
$D = 5^2 - 4k = 0$
$\therefore \mathrm{k} = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때
$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$ 이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

22. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$의 그래프이고 직선은 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$

④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b,\ (g \circ g)(c) = e$

f와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.

23. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

해설

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$
$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$
즉, $a^2=1$, $a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x-3$이고
$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.

24. 함수 $f(x)=|4x+a|+b$ 는 $x=3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 $a,\ b$ 의 값에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

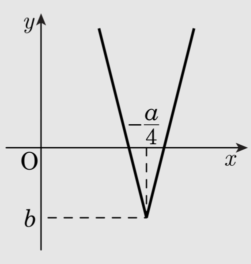
▷ 정답 : 10

해설

$f(x)=|4x+a|+b=\left|4\left(x+\frac{a}{4}\right)\right|+b$ 의 그래프는

$y=|4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x=-\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4}=3,\ b=-2$

따라서 $a=-12,\ b=-2$ 이므로

$\therefore b-a=10$

25. 함수 $y = ||x| - |x-2||$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

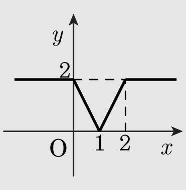
$y = ||x| - |x-2||$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |-x+x-2| = 2$

(ii) $0 \le x < 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |x+x-2| = 2|x-1|$

(iii) $x \ge 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = x-2$ 이므로 $y = |x-x+2| = 2$

(i), (ii), (iii) 로부터 $y = ||x| - |x-2||$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 최댓값은 2 , 최솟값은 0 이므로 $M = 2$, $m = 0$ $\therefore$ $M+m = 2$