1. 두 자연수 $2^4 \times 3 \times 5^2$, 2×5^2 의 공약수가 될 수 없는 것을 모두 고르면?(정답 3개)

① 2^2 ② 2×5 ③ 5

④ $2^2 \times 5$ ⑤ $2^4 \times 3 \times 5^2$

해설

최대 공약수는 2×5^2 이고, 공약수는 최대 공약수의 약수이므로 $1, 2, 5, 2 \times 5, 5^2, 2 \times 5^2$ 이다.

2. 6 으로 나누면 5 가 남고, 8 로 나누면 7 이 남고, 9 로 나누면 8 이 남는 세 자리의 자연수 중 가장 큰 수는?

① 901 ② 941 ③ 959 ④ 935 ⑤ 999

해설

구하는 수를 n 이라 하면
n = (6, 8, 9 의 공배수)–1 인 수이다.
6, 8, 9 의 최소공배수는 72 이다.
세 자리 자연수 중 가장 큰 72 의 배수는 936 이다.
$\therefore\ n = 936 - 1 = 935$

3. 1881 는 a, b, c 의 곱으로 표현된다. $a+b+c$ 의 최솟값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 39

해설

$1881 = 3 \times 3 \times 11 \times 19$
따라서, 순서에서 상관없이 a, b, c 가 될 수 있는 수를 살펴보면,
$(9, 11, 19)$, $(3, 19, 33)$, $(3, 11, 57)$, $(3, 3, 209)$ 이다.
$\therefore a+b+c$ 의 최솟값$= 9+11+19 = 39$

4. 남자 98 명, 여자 84 명인 어떤 모임에서 조 대항 장기 자랑을 하려고 한다. 조별 인원수가 같고 각 조에 속한 남녀의 비가 같도록 조를 짤 때, 최대한 만들 수 있는 조를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 14 개

해설

짤 수 있는 조의 수를 x 라 할 때,
$98 = x \times \square$, $84 = x \times \triangle$
x 는 98 과 84 의 최대공약수
$98 = 7^2 \times 2$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
$\therefore x = 2 \times 7 = 14$(개)

5. 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 54 cm, 90 cm, 108 cm 인 직육면체 모양의 상자를 크기가 같은 정육면체 상자들로 빈틈없이 채우려고 한다. 정육면체를 최대한 적게 사용하려고 할 때, 정육면체의 개수는?

① 180 개 ② 90 개 ③ 36 개

④ 24 개 ⑤ 15 개

해설

정육면체가 가장 적을 때 정육면체 한 모서리의 길이가 가장 크므로 상자 한 모서리의 길이는 54, 90, 108 의 최대공약수인 18cm 이다.
따라서 상자의 개수는
$(54 \div 18) \times (90 \div 18) \times (108 \div 18) = 90$ (개)

6. 어떤 공장의 한 기계에 세 톱니바퀴 A, B, C 가 서로 맞물려 있다. 톱니바퀴 A, B, C 의 톱니 수는 각각 24, 18, 36 개이다. 이때, 세 톱니바퀴가 회전하여 다시 원위치에 오는 세 톱니바퀴의 회전수를 각각 a, b, c 라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

24 와 18, 36 의 최소공배수에 처음으로 다시 맞물린다.
$24 = 2^3 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $36 = 2^2 \times 3^2$
최소공배수는 $2^3 \times 3^2 = 72$
톱니바퀴 A 는 $72 \div 24 = 3$(바퀴) $= a$
톱니바퀴 B 는 $72 \div 18 = 4$(바퀴) $= b$
톱니바퀴 C 는 $72 \div 36 = 2$(바퀴) $= c$ 이다.
$\therefore\ a+b+c = 3+4+2 = 9$

7. 두 자리의 두 정수의 최소공배수가 792 이고 최대공약수가 11 이라고 한다. 이때, 이를 만족하는 두 정수의 합을 구하면?

① 87 ② 99 ③ 175 ④ 183 ⑤ 187

해설

$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ 이고, 두 수는 최대공약수 11 의 배수이고, 두 자리 수이므로 $11 \times 2^3 = 88$ 과 $11 \times 3^2 = 99$ 가 된다.

$\therefore\ 88 + 99 = 187$

8. 어떤 분수를 두 분수 $\frac{21}{8}$ 과 $\frac{35}{12}$ 에 각각 곱하였더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 곱한 수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{24}{7}$

해설

곱하는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자

$\frac{21}{8} \times \frac{b}{a} =$ (자연수) $\begin{cases} b\text{는 } 8\text{의 배수} \\ a\text{는 } 21\text{의 약수} \end{cases}$

$\frac{35}{12} \times \frac{b}{a} =$ (자연수) $\begin{cases} b\text{는 } 12\text{의 배수} \\ a\text{는 } 35\text{의 약수} \end{cases}$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(8,\ 12\text{의 공배수})}{(21,\ 35\text{의 공약수})} \cdots$ ㉠ 이다.

㉠을 만족하는 가장 작은 분수는

$\frac{b}{a} = \frac{(8,\ 12\text{의 최소공배수})}{(21,\ 35\text{의 최대공약수})} \cdots$ ㉡ 이다.

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$

9. 90 에 가능한 한 작은 수 a 를 곱하여 어떤 수 b^2 이 되도록 할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 자연수)

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

해설

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
$2 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
$\therefore\ a = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$
$90 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 5$
$= 2^2 \times 3^2 \times 5^2$
$= (2 \times 3 \times 5)^2$
$\therefore\ b = 30$
따라서 $a + b = 10 + 30 = 40$ 이다.

10. 1 부터 100 까지의 자연수 중에서 72 과 공약수가 1 개인 수는 몇 개인가?

① 30 개 ② 31 개 ③ 32 개 ④ 33 개 ⑤ 34 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72 와 공약수가 1 개인 수는 2 의 배수도 아니고 3 의 배수도 아닌 수이므로

100 − (2의 배수의 개수) − (3의 배수의 개수) + (6의 배수의 개수) $= 100 - 50 - 33 + 16 = 33$