1. 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n에 대하여 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+(㉮)x+(㉯)=0$이다. ㉮와 ㉯에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$

$\therefore\ \alpha^3=1,\ \beta^3=1$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

㉠ : $n=3k+1$(k는 정수) 일 때,

$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\cdot\alpha+(\beta^3)^k\cdot\beta$

$=\alpha+\beta=-1$

㉡ : $n=3k+2$(k는 정수) 일 때,

$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\alpha^2+(\beta^3)^k\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1-2=-1$

㉠, ㉡에서 n이 3의 배수가 아니면

$\alpha^n+\beta^n=-1$, $\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$

따라서 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+x+1=0$ $\therefore$ ㉮ $=1$, ㉯ $=1$

2. 실수 $x,\ y,\ z$가 $x+y+z=6,\ xy+yz+zx=9$를 만족할 때 x의 최대값을 M, 최소값을 m이라 한다. 이 때 $M-m$의 값을 구하면 ?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y+z=6-x,$

$yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=(x-3)^2$

실수 y, z를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$t^2-(6-x)t+(x-3)^2=0$

$D=(6-x)^2-4(x-3)^2\ge 0$에서 $x(x-4)\le 0$

$\therefore\ 0\le x\le 4$

$M=4,\ m=0\quad \therefore\ M-m=4$

3. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 $p, q\ (-1<p<0<q<1)$라 하자. 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 해를 $r, s(r<s)$라 할 때, p, q, r, s의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $p<q<r<s$

② $r<s<p<q$

③ $p<r<s<q$

④ $r<p<q<s$

⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$p+q=-\frac{b}{a},\ \ pq=\frac{c}{a}$$

따라서, $r+s=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\dfrac{p+q}{pq}$

$$=\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots ㉠$$

$$rs=\frac{a}{c}=\frac{1}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\{r,\ s\}=\left\{-\dfrac{1}{p},\ \ -\dfrac{1}{q}\right\}$

$-1<p<0$에서 $-\dfrac{1}{p}>1$, $0<q<1$ 에서 $-\dfrac{1}{q}<-1$

$$\therefore\ \ r=-\frac{1}{q}<-1<p<q<1<-\frac{1}{p}=s$$

4. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
$\therefore$ $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$에서
즉, α, β는 $f(x) = 1 - x$의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$은
$(x - \alpha)(x - \beta)$를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
$f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1$,
$f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
$\therefore$ $a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$