1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$

④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$

$\therefore \ a + b = 3x^2 + x + 1$

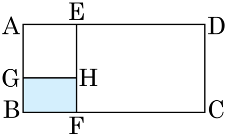
해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

3. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$ ② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$ ④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square\mathrm{GBFH} = \square\mathrm{ABCD} - \square\mathrm{AGHE} - \square\mathrm{EFCD}$

$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$

$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

4. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

5. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서
x^4항의 계수는 x^3의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$의 전개식에서 x^3의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

6. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$　② $3x^2-1$　③ $3x^2$

④ $3x^2+1$　⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$$A=\frac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$$

7. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\quad \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

8. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$　② $a+b=x+y$　③ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

④ $x=y$　⑤ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$을

간단히 정리하면

$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$

즉, $(ay-bx)^2=0$

$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수)

따라서, $ay=bx$에서 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

9. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

10. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

① 에 대입하면, $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 1$

11. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

12. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+8)+a \\ &= X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16\end{aligned}$$

따라서 $a=16$

13. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore a=b=c\rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

14. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = k\times10^{n}$ (단, $0<k<10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72　　② 71　　③ 70　　④ 69　　⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = N$이라고 하면

$$\frac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}} < N < \frac{10^{85}}{10^{15}}$$

$$\frac{10\times10^{84}}{2\times10^{15}} < N < \frac{10\times10^{84}}{10^{15}}$$

$$5\times10^{69} < N < 10\times10^{69}$$

따라서 $N = k\times10^{69}(5<k<10)$

$\therefore\ n = 69$

15. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.