1. 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots$ ㉡

㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times2=2$

2. 좌표평면에서 세 점 A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 2)$, C$(6,\ 0)$에 대하여 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① $(2, -1)$　　② $(2, -2)$　　③ $(2, -3)$

④ $(-2, 3)$　　⑤ $(-2, -3)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기 : $\dfrac{2-1}{2-(-1)}$,　중점은 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ ⇒ 수직이등분선

: $y = -3\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기는 $\dfrac{2-1}{6-2} = \dfrac{1}{4}$, 중심은 $(4,\ 1)$ ⇒ 수직이등분선: $y = 2(x-4)+1$

두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2,\ y = -3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$\therefore\ (2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

O$(x,\ y)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{CO}}$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2 = (x-6)^2+y^2$, $7x-y = 17 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{CO}}$에서 $(x-2)^2+(y-2)^2 = (x-6)^2+y^2$, $2x-y = 7 \cdots$ ㉡

㉠ ㉡에서 교점의 좌표는 $(2,\ -3)$

3. 세 꼭짓점이 $A(1,\ 3)$, $B(p,\ 3)$, $C(1,\ q)$인 $\triangle ABC$의 외심의 좌표가 $(2,\ 1)$일 때 pq의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $pq = -3$

해설

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2$에서 $(p-2)^2 = 1$

$\therefore\ p = 1,\ 3$

그런데 $p = 1$일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1$ $\therefore\ p = 3$

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2$에서 $(q-1)^2 = 4$

$\therefore\ q = 3,\ -1$

그런데 $q = 3$일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$\therefore\ pq = 3 \times (-1) = -3$

4. 세 점 $\mathrm{A}(6, 2)$ $\mathrm{B}(0, -6)$, $\mathrm{C}(7, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$ 이므로 $\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점이 외심이다.

$\left(\dfrac{6+0}{2}, \dfrac{2+(-6)}{2}\right) = (3, -2)$

$\therefore\ 3ab = -18$

5. $\triangle$ABC 의 무게중심이 $(3, 1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R이라 할 때, $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① (2, 3) ② (1, 3) ③ (3, 2)

④ (2, 2) ⑤ (3, 1)

해설

세 점을 $(a, d), (b, e), (c, f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3, 1)$ 이므로,
$\frac{a+b+c}{3} = 3,\ \frac{d+e+f}{3} = 1 \cdots$ ㉠
변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는
$\mathrm{P}\left(\frac{2a+3b}{3+2}, \frac{2d+3e}{3+2}\right) = \left(\frac{2a+3b}{5}, \frac{2d+3e}{5}\right)$
$\mathrm{Q}\left(\frac{2b+3c}{3+2}, \frac{2e+3f}{3+2}\right) = \left(\frac{2b+3c}{5}, \frac{2e+3f}{5}\right)$
$\mathrm{R}\left(\frac{2c+3a}{3+2}, \frac{2f+3d}{3+2}\right) = \left(\frac{2c+3a}{5}, \frac{2f+3d}{5}\right)$ 이며,
$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{5(a+b+c)}{5\cdot 3}, \frac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$
$= \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}\right)$
$\therefore$ ㉠에 의해 (3, 1)

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore$ (3, 1)

6. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5,\ 4)$, 변 AB 의 중점의 좌표가 $(-1,\ 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때, 변 BC 의 중점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 5 ⑤ 7

해설

점 $\mathrm{B}(X, Y)$ 라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 : $\left(\dfrac{X+5}{2}, \dfrac{Y+4}{2}\right) = (-1, 3)$

$\therefore\ X=-7,\ Y=2$

이제 점 $\mathrm{C}(x, y)$ 라 하면,

무게중심은 $\left(\dfrac{5+(-7)+x}{3}, \dfrac{4+2+y}{3}\right) = (1, 2)$

$\therefore\ x=5,\ y=0$

$\therefore$ 변 BC 의 중점은

$\left(\dfrac{-7+5}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = (-1, 1)$

7. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G$(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 내분하는 점이 각각 P$(a, 3)$, Q$(-2, -2)$, R$(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$
또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$
$\therefore\ a+b = -1$

8. △ABC 에서 변 AB, BC, CA 의 중점이 각각 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 일 때, 점A 의 좌표를$(x_1,\ y_1)$ 이라 할 때, x_1+y_1 의 값은?

① −3　② −2　③ −1　④ 0　⑤ 1

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 라 하면

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2$ 즉, $x_1+x_2=-4\cdots$ ①

$\dfrac{x_2+x_3}{2}=3$ 즉, $x_2+x_3=6\cdots$ ②

$\dfrac{x_1+x_3}{2}=0$ 즉, $x_1+x_3=0\cdots$ ③

① + ② + ③ 하면 $x_1+x_2+x_3=1$

$\therefore\ x_1=-5,\quad x_2=1,\quad x_3=5$

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$ 즉, $y_1+y_2=0\cdots$ ④

$\dfrac{y_2+y_3}{2}=1$ 즉, $y_2+y_3=2\cdots$ ⑤

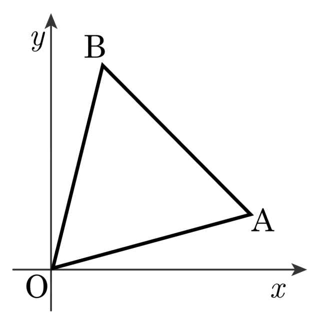
$\dfrac{y_1+y_3}{2}=3$ 즉, $y_1+y_3=6\cdots$ ⑥

④ + ⑤ + ⑥ 하면 $y_1+y_2+y_3=4$

$\therefore\ y_1=2,\quad y_2=-2,\quad y_3=4$

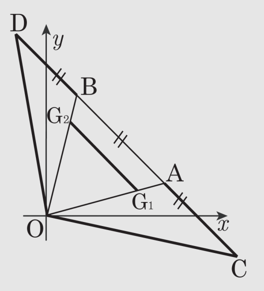
따라서, $x_1+y_1=-3$

9. 좌표평면 위에서 세 점 O(0, 0), A(4,1), B(1. 4) 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에 대하여 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 C, 선분 AB 를 2 : 1 로 외분하는 점을 D 라 하자. 두 삼각형 OCB, OAD 의 무게중심을 각각 G_1, G_2 라 할 때, 선분 G_1G_2 의 길이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

해설



선분 OA 는 삼각형 OCB 의 중선이므로 삼각형 OCB 의 무게중심 G_1 은 선분 OA 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
마찬가지로 삼각형 OAD 의 무게중심 G_2 는 선분 OB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
이때 $\triangle OG_1G_2 \backsim \triangle OAB$ 이고 그 닮음비가 2 : 3 이므로 선분 G_1G_2 의 길이는 선분 AB 의 길이의 $\frac{2}{3}$ 이다.
∴ 구하는 선분의 길이는
$\frac{2}{3}\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2} = 2\sqrt{2}$

10. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = mx + n$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 $\mathrm{P}(2,\ 5)$ 를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, m 의 값을 구하여라.

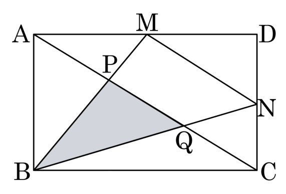
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2)$ 라 하면
$x^2 - 6x = mx + n$, $x^2 - (m+6)x - n = 0$ 의 두 근이 $x_1,\ x_2$ 이므로
근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = m + 6$ 이다.
두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 와 $\mathrm{P}(2,\ 5)$ 의 무게중심이 $(4,\ 1)$ 이므로
$\dfrac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 4$ 에서 $x_1 + x_2 = 10$ 이므로
$m + 6 = 10 \quad \therefore\ m = 4$

11. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M , N 이라 하고, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ 과 $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 P , Q 라 한다. 사각형 MPQN 의 넓이가 $30\,cm^2$ 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이는?



① $24\,cm^2$ ② $25\,cm^2$ ③ $28\,cm^2$
④ $30\,cm^2$ ⑤ $36\,cm^2$

해설

점 P 와 점 Q 가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ 의 무게중심이므로
$\overline{BP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QN} = 2 : 1$ 이고 $\overline{PQ} \,//\, \overline{MN}$ 이다.
$\triangle PBQ$ 와 $\triangle MBN$ 의 닮음비가 $2 : 3$ 이므로
$\triangle PBQ : \triangle MBN = 4 : 9$ 이다.
따라서, $\triangle PBQ : \square MPQN = 4 : 5$ 이므로 $\triangle PBQ : 30 = 4 : 5$
$\therefore\ \triangle PBQ = 24(cm^2)$

12. 원 점 O를 한 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{OAB}$의 무게중심의 좌표가 (8, 6)이다. 이를 만족하는 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$가 반드시 지나는 정점의 좌표를 (p, q)라 할 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

$\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$라 하면,

무게중심은 $\left(\dfrac{a+c}{3}, \dfrac{b+d}{3}\right) = (8, 6)$이므로

$a+c=24, \quad b+d=18$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점은

$\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b+d}{2}\right) = (12, 9)$

$\therefore \quad p+q=21$

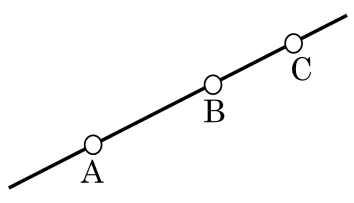
13. 세 점 $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$과 점 $P(x,y)$가 있다. $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $P(0,1)$　② 30, $P(0,2)$　③ 38, $P(0,1)$
④ 34, $P(0,2)$　⑤ 38, $P(0,2)$

해설

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$
$=(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2+x^2+(y-3)^2$
$=3x^2+3y^2-6y+41$
$=3x^2+3(y-1)^2+38$
따라서 최솟값 38, $P(0,1)$

14. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$)



① $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점

② $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점

③ $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점

④ $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점

⑤ $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

$\mathrm{A}(-2a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 0),\ \mathrm{C}(a,\ 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고

도매상의 위치를 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (x+2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

$= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a,\ y = 0$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소이고

운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{a},\ 0\right)$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.

15. 평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 6)$, $C(0,\ 1)$과 임의의 점 P가 있을 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$을 최소로하는 점 P 의 좌표는 (a, b)이고, 그 때의 최솟값은 k이다. 이 때 $ab-k$의 값을 구하면?

① -25　　② -20　　③ -15　　④ -10　　⑤ -5

해설

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$

$=3(a^2-2a+1)+3(b^2-6b+9)-3-27+58$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28$

$\therefore\ a=1,\ b=3$일 때, 최솟값은 28

$\therefore\ ab-k=-25$

16. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P 가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{\mathrm{BC}}$를 x 축, $\overline{\mathrm{BC}}$의 수직이등분선을 y축으로 잡고
$\mathrm{A}(0, \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(1, 0)$ 이라고 하자.
점 P는 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로
좌표를 $\mathrm{P}(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2 &= (x^2+3)+(x-1)^2 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.