

1. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 $P(a,b)$ 라 할 때, $a^2 - b^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심 (외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$$\overline{PO}^2 = \overline{PA}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2, \quad a+b=1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{PB}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2, \quad a-b=2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{로 부터 } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 1 \times 2 = 2$$

2. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① (2, -1)

② (2, -2)

③ (2, -3)

④ (-2, 3)

⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ 수직이등분선

$$: y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 (4, 1) $\Rightarrow$ 수직이등분

$$\text{선: } y = 2(x - 4) + 1$$

두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2, y = -3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$$\therefore (2, -3)$$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

O(x, y)라고 하면

$$\overline{AO} = \overline{CO} \text{에서 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{7}$$

$$\overline{BO} = \overline{CO} \text{에서 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{7} \textcircled{4} \text{에서 교점의 좌표는 } (2, -3)$$

3. 세 꼭짓점이 $A(1, 3)$, $B(p, 3)$, $C(1, q)$ 인 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표가 $(2, 1)$ 일 때 pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2 \text{에서 } (p-2)^2 = 1 \\ \therefore p = 1, 3$$

그런데 $p = 1$ 일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1 \therefore p = 3$

$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2 \text{에서 } (q-1)^2 = 4 \\ \therefore q = 3, -1$$

그런데 $q = 3$ 일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$$\therefore pq = 3 \times (-1) = -3$$

4. 세 점 $A(6, 2)$ $B(0, -6)$, $C(7, -5)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24

② -18

③ -12

④ 9

⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right) = (3, -2)$$

$$\therefore 3ab = -18$$

5. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $(3, 1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표를 구하면?

- ① $(2, 3)$ ② $(1, 3)$ ③ $(3, 2)$
 ④ $(2, 2)$ ⑤ $(3, 1)$

해설

세 점을 $(a, d), (b, e), (c, f)$ 라 하면,
 무게중심이 $(3, 1)$ 이므로,

$$\frac{a+b+c}{3} = 3, \quad \frac{d+e+f}{3} = 1 \dots \textcircled{7}$$

변 AB, BC, CA 를 $3 : 2$ 로 내분하는
 점 P, Q, R 의 좌표는

$$P\left(\frac{2a+3b}{3+2}, \frac{2d+3e}{3+2}\right) = \left(\frac{2a+3b}{5}, \frac{2d+3e}{5}\right)$$

$$Q\left(\frac{2b+3c}{3+2}, \frac{2e+3f}{3+2}\right) = \left(\frac{2b+3c}{5}, \frac{2e+3f}{5}\right)$$

$$R\left(\frac{2c+3a}{3+2}, \frac{2f+3d}{3+2}\right) = \left(\frac{2c+3a}{5}, \frac{2f+3d}{5}\right) \text{이며,}$$

$\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5(a+b+c)}{5 \cdot 3}, \frac{5(d+e+f)}{5 \cdot 3}\right)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}\right)$$

$\therefore \textcircled{7}$ 에 의해 $(3, 1)$

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은
 원래 삼각형의 무게중심과 같다.

$\therefore (3, 1)$

6. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, 변 BC의 중점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 5

⑤ 7

해설

점 B(X, Y)라 하면,

$$\overline{AB} \text{의 중점} : \left(\frac{X+5}{2}, \frac{Y+4}{2} \right) = (-1, 3)$$

$$\therefore X = -7, Y = 2$$

이제 점 C(x, y)라 하면,

$$\text{무게중심은} \left(\frac{5 + (-7) + x}{3}, \frac{4 + 2 + y}{3} \right) = (1, 2)$$

$$\therefore x = 5, y = 0$$

$\therefore$ 변 BC의 중점은

$$\left(\frac{-7 + 5}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (-1, 1)$$

7. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 $G(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a - 2 + 5}{3}, \frac{3 - 2 + b}{3} \right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{a + 3}{3} = 2 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\text{또 } \frac{1 + b}{3} = -1 \text{ 에서 } b = -4$$

$$\therefore a + b = -1$$

8. $\triangle ABC$ 에서 변 AB , BC , CA 의 중점이 각각 $(-2, 0)$, $(3, 1)$, $(0, 3)$ 일 때, 점 A 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 할 때, $x_1 + y_1$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 라 하면

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \text{ 즉, } x_1 + x_2 = -4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 3 \text{ 즉, } x_2 + x_3 = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = 0 \text{ 즉, } x_1 + x_3 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

① + ② + ③ 하면 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$\therefore x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 5$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \text{ 즉, } y_1 + y_2 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = 1 \text{ 즉, } y_2 + y_3 = 2 \cdots \textcircled{5}$$

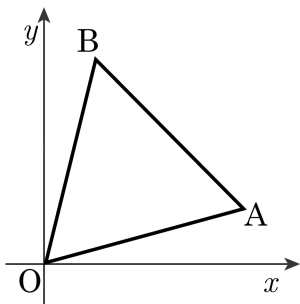
$$\frac{y_1 + y_3}{2} = 3 \text{ 즉, } y_1 + y_3 = 6 \cdots \textcircled{6}$$

④ + ⑤ + ⑥ 하면 $y_1 + y_2 + y_3 = 4$

$$\therefore y_1 = 2, y_2 = -2, y_3 = 4$$

따라서, $x_1 + y_1 = -3$

9. 좌표평면 위에서 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 1)$, $B(1, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에 대하여 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 외분하는 점을 C , 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점을 D 라 하자. 두 삼각형 OCB , OAD 의 무게중심을 각각 G_1 , G_2 라 할 때, 선분 G_1G_2 의 길이는?



- ① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

해설

선분 OA 는 삼각형 OCB 의 중선이므로 삼각형 OCB 의 무게중심 G_1 은

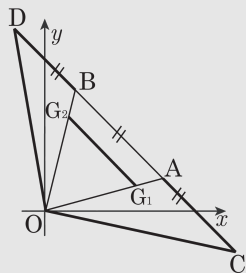
선분 OA 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

마찬가지로 삼각형 OAD 의 무게중심 G_2 는 선분 OB 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

이때 $\triangle OG_1G_2 \sim \triangle OAB$ 이고 그 닮음 비가 $2 : 3$ 이므로 선분 G_1G_2 의 길이는 선분 AB 의 길이의 $\frac{2}{3}$ 이다.

$\therefore$ 구하는 선분의 길이는

$$\frac{2}{3} \sqrt{(4-1)^2 + (1-4)^2} = 2\sqrt{2}$$



10. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = mx + n$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 $P(2, 5)$ 를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(4, 1)$ 일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면

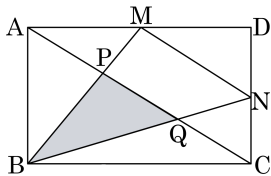
$x^2 - 6x = mx + n$, $x^2 - (m+6)x - n = 0$ 의 두 근이 x_1, x_2 이므로
근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = m + 6$ 이다.

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 와 $P(2, 5)$ 의 무게중심이 $(4, 1)$ 이므로

$$\frac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 4 \text{에서 } x_1 + x_2 = 10 \text{이므로}$$

$$m + 6 = 10 \quad \therefore m = 4$$

11. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하고, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ 과 $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 P, Q라 한다. 사각형 MPQN의 넓이가 30 cm^2 일 때, 삼각형 PBQ의 넓이는?



- ① 24 cm^2 ② 25 cm^2 ③ 28 cm^2
 ④ 30 cm^2 ⑤ 36 cm^2

해설

점 P와 점 Q가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ 의 무게중심이므로
 $\overline{BP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QN} = 2 : 1$ 이고 $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ 이다.

$\triangle PBQ$ 와 $\triangle MBN$ 의 닮음비가 $2 : 3$ 이므로

$\triangle PBQ : \triangle MBN = 4 : 9$ 이다.

따라서, $\triangle PBQ : \square MPQN = 4 : 5$ 이므로 $\triangle PBQ : 30 = 4 : 5$

$\therefore \triangle PBQ = 24(\text{cm}^2)$

12. 원 점 O를 한 꼭짓점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 (8, 6)이다. 이를 만족하는 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}$ 가 반드시 지나는 점의 좌표를 (p, q) 라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$A(a, b)$, $B(c, d)$ 라 하면,

무게중심은 $\left(\frac{a+c}{3}, \frac{b+d}{3}\right) = (8, 6)$ 이므로

$$a + c = 24, \quad b + d = 18$$

$\therefore \overline{AB}$ 의 중점은

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (12, 9)$$

$$\therefore p + q = 21$$

13. 세 점 $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$ 과 점 $P(x,y)$ 가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값과 그 때의 점 P 의 좌표는?

① 30, $P(0,1)$

② 30, $P(0,2)$

③ 38, $P(0,1)$

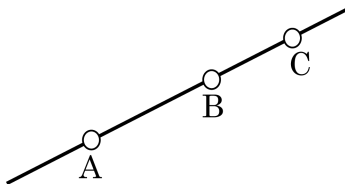
④ 34, $P(0,2)$

⑤ 38, $P(0,2)$

해설

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 41 \\ &= 3x^2 + 3(y-1)^2 + 38 \\ & \text{따라서 최솟값 } 38, P(0,1) \end{aligned}$$

14. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$)



- ① $\overline{AB}$ 의 중점
- ② $\overline{BC}$ 의 중점
- ③ $\overline{AC}$ 의 중점
- ④ $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점
- ⑤ $\overline{AC}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

$A(-2a, 0)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$ (단, $a > 0$) 이라 하고

도매상의 위치를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x + 2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 \\ &= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2 \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a$, $y = 0$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소이고
운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $P\left(-\frac{1}{3}a, 0\right)$ 은 $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.

15. 평면 위의 세 점 $A(-1, 2), B(4, 6), C(0, 1)$ 과 임의의 점 P 가 있을 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 을 최소로하는 점 P 의 좌표는 (a, b) 이고, 그 때의 최솟값은 k 이다. 이 때 $ab - k$ 의 값을 구하면?

- ① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}
 & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\
 &= (a+1)^2 + (b-2)^2 + (a-4)^2 + (b-6)^2 + a^2 + (b-1)^2 \\
 &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 58 \\
 &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) - 3 - 27 + 58 \\
 &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 28 \\
 &\therefore a=1, b=3 \text{ 일 때, 최솟값은 } 28 \\
 &\therefore ab - k = -25
 \end{aligned}$$

16. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고
 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.