1. $\dfrac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

$1-2i = x+yi$

$x=1, y=-2, x+y=-1$

2. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$

모든 x에 대해 성립하려면

$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$

공통근 : $a=1$

3. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$ ② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{2},\ 2$

④ $-\frac{2}{7},\ 2$ ⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

4. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

5. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

6. 연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 의 해를

$x=\alpha$,$y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x+1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5,\ 2x^2+2x-4=0,$

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

$x=1$일 때, $y=2,$

$x=-2$일 때, $y=-1$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2$ 또는 $\alpha=-2,\ \beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 0.7x - 1.2 \le 0.5x + 0.4 \\ \dfrac{x+2}{3} < 3 \end{cases}$ 을 만족하는 가장 큰 정수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} 0.7x - 1.2 \le 0.5x + 0.4 \\ \dfrac{x+2}{3} < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x - 12 \le 5x + 4 \\ x + 2 < 9 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x < 7 \end{cases}$

$\therefore x < 7$

따라서 가장 작은 정수는 6 이다.

8. 연립부등식 $2x+1 \geq x+5 > -3x+1$의 해는?

① $x \leq -4$ ② $x \leq -1$ ③ $-1 \leq x \leq 4$

④ $x \geq 1$ ⑤ $x \geq 4$

해설

$2x+1 \geq x+5,\ x \geq 4$

$x+5 > -3x+1,\ x > -1$

$\therefore\ x \geq 4$

9. 연립부등식 $-3 < \dfrac{x+a}{4} < 1$ 의 해가 $-9 < x < b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$-3 < \frac{x+a}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < \dfrac{x+a}{4} \\ \dfrac{x+a}{4} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12 < x+a \\ x+a < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -12-a \\ x < 4-a \end{cases}$$

$-12-a < x < 4-a$ 이므로 $-12-a = -9$

$\therefore\ a = -3$

$4-a = b$ 이므로 $4-(-3) = b$

$\therefore\ b = 7$

따라서 $a+b = -3+7 = 4$ 이다.

10. 부등식 $|x-3| \geq 2$ 의 해로 다음 중 옳은 것은?

① $1 \leq x \leq 5$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$

③ $-1 \leq x \leq 5$

④ $x \leq -1$ 또는 $x \geq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

$|x-3| \geq 2$에서 $x-3 \geq 2$ 또는 $-(x-3) \geq 2$ $\therefore$ $x \geq 5$ 또는 $x \leq 1$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 n, $n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1) = a + 1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n = \dfrac{a-1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2} + 1\right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$a = -1,\ 5$

$\therefore -1 + 5 = 4$

12. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 상수 k의 범위는?

① $k \le -1,\ k \ge 2$

② $k \le -1$

③ $2 \le k < 3$

④ $1 < k < 3$

⑤ $k \le -1,\ 2 \le k < 3$

해설

㉠ 두 근이 실수가 되어야 하므로 $\dfrac{D}{4} \ge 0$

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(3-k)=k^2-k-2 \ge 0$

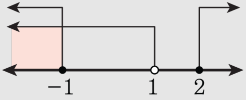
$(k-2)(k+1) \ge 0$

$\therefore\ k \le -1, k \ge 2 \cdots$ ㉮

㉡ 둘 다 양수이려면 합 >0 이고, 곱 >0

$-2(k-1)>0,\ 3-k>0 \cdots$ ㉯

$\therefore\ k < 1$

$\Rightarrow$ 

$\therefore\ k \le -1$

13. 이차함수 $y = -ax^2 + 4ax + 5$ 의 최댓값이 -3 일 때, 상수 a 의 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$y = -ax^2 + 4ax + 5$
$y = -a(x^2 - 4x + 4 - 4) + 5$
$y = -a(x - 2)^2 + 4a + 5$
최댓값은 $4a + 5 = -3$ 이므로 $a = -2$ 이다.

14. 4차방정식 $x^4+2x^2+4x+8=0$을 $(x^2+a)^2-(2x+b)^2=0$꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1\pm\sqrt{3}i$ ② $1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $-1\pm\sqrt{3}i$

④ $-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$(x^2+a)^2-(2x+b)^2$

$=x^4+(2a-4)x^2-4bx+a^2-b^2$

이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로

$2=2a-4,\ 4=-4b,\ 8=a^2-b^2$

$\therefore a=3,\ b=-1$

따라서 주어진 4차방정식은

다음과 같이 변형하면,

$(x^2+3)^2-(2x-1)^2=0$

$\therefore\ (x^2-2x+4)(x^2+2x+2)=0$

$\therefore\ x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1\pm i$

15. x의 삼차방정식 $x^3+px^2+qx-105=0$의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 56 ② 21 ③ 10 ④ -10 ⑤ -21

해설

세 근을 α , β , γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=105$

마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma=3\cdot5\cdot7$

$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.

$\therefore\ p=-(3+5+7)=-15$,

$q=3\cdot5+5\cdot7+7\cdot3=15+35+21=71$

$\therefore\ p+q=56$

16. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

17. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르시오.

보 기

㉠ $(1+\omega^2)^3 = -1$

㉡ $(1+\omega)^{10} = \omega^2$

㉢ 모든 자연수 n에 대하여 $(1+\omega)^{3n} = (-1)^n$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉠ $\omega^2 + 1 = -\omega$,

$(\omega^2+1)^3 = (-\omega)^3 = -\omega^3 = -1$(○)

㉡ $(1+\omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$

$= \omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = \omega^2$(○)

㉢ $(-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n} \cdot (\omega^3)^{2n}$

$= (-1)^n \cdot 1^{2n} = (-1)^n$

$(\because\ (-1)^{3n} = \{(-1)^3\}^n = (-1)^n)$ (○)

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참

18. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 실근을 α, β, γ라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값을 구하면?

① 7 ② 11 ③ 15 ④ 19 ⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 근이 α ,β ,γ이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

19. 부등식 $x^2 - 5|x| + 4 \le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(i) $x > 0$

$x^2 - 5x + 4 \le 0$

$(x-1)(x-4) \le 0$

$\Rightarrow \quad 1 \le x \le 4$

(ii) $x < 0$

$x^2 + 5x + 4 \le 0$

$(x+1)(x+4) \le 0$

$\Rightarrow \quad -4 \le x \le -1$

$\therefore$ 정수의 개수 : 8개

20. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$x^2 - 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 4 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2 - 5x < 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 < 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x-3) < 0$

$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{2} < x < 3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3개다.

21. x에 대한 이차부등식 $a(2x^2+1) \le (x-1)^2$의 해가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $0 < a < \frac{3}{2}$ ② $a > \frac{3}{2}$
③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ ④ $a \ge \frac{3}{2}$
⑤ $a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > \frac{3}{2}$

해설

$a(2x^2+1) \le (x-1)^2$에서
$2ax^2 + a \le x^2 - 2x + 1$,
$(2a-1)x^2 + 2x + a - 1 \le 0$이므로
$2a-1 > 0$일 때
즉 $a > \frac{1}{2}$일 때
$\frac{D}{4} = 1-(2a-1)(a-1)$
$= 1-(2a^2-3a+1) = -2a^2+3a < 0$이어야
모든 x에 대하여 성립한다.
즉 $a(2a-3) > 0$
$a < 0$ 또는 $a > \frac{3}{2}$인데
$a > \frac{1}{2}$이어야 하므로
$a > \frac{3}{2}$

22. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

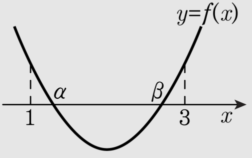
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

23. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$ ② $a>-1$ ③ $a>1$

④ $a<1$ ⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$

24. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.
>
> ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ $(a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수$)$라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.
따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

25. $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　② -1　③ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

④ 1　⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2z+1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2+z+1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$\therefore z^3 = 1, \quad \bar{z}^3 = 1$

$$\begin{aligned} z^{2005} + \bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z} \\ &= z + \bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$

26. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

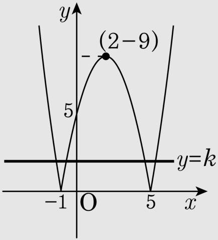
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

27. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답 : ________ cm

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 12 cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm 라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(24-x) \\
&= -x^2 + 24x \\
&= -(x-12)^2 + 144
\end{aligned}
$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$\therefore x = 12,\ 24 - x = 12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

28. 150 개의 배를 바구니에 담는데 한 바구니에 담을 때 10 개씩 담으면 배가 남게 되고, 11 개씩 담게 되면 마지막 바구니를 다 채우지 못한다. 이 때, 바구니의 개수는 몇 개인가?

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 14 개

해설

문제에서 구하고자 하는 바구니의 개수를 x 라고 놓자.
10 개씩 모든 바구니를 채우면 배의 개수는 $10x$ 이고, 11 개씩 모든 바구니를 채우면 배의 개수는 $11x$ 이다. 그러나 배의 개수가 10 개씩 채운 개수보다 많고 11 개씩 채운 개수보다는 적으므로 이를 식으로 나타내면 $10x < 150 < 11x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면 $\begin{cases} 10x < 150 \\ 11x > 150 \end{cases}$ 이고, 간단히 하면, $\begin{cases} x < 15 \\ x > \dfrac{150}{11} \end{cases}$ 이다. 이를 다시 나타내면 $\dfrac{150}{11} < x < 15$ 이다.

$\dfrac{150}{11} = 13.6363\cdots$ 이므로, 바구니의 개수는 14 개이다.

29. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$　② $2 < a < 5$　③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$　⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore D &= a^2 - 4(a+3) \\ &= a^2 - 4a - 12 \\ &= (a-6)(a+2) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a = 6 \; (\because a > 0)$

30. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(k-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 > 0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하면?

① $k < 1,\ k > 2$ ② $1 < k < 2$ ③ $-2 \le k \le 2$

④ $k \le 1,\ k > 2$ ⑤ $1 \le k < 2$

해설

i) $k \ne 1$일 때, 주어진 부등식이 성립하려면

판별식이 0보다 작아야 한다

$D' = (k-1)^2 - (k-1) < 0$

$\Rightarrow (k-1)(k-2) < 0$

$\Rightarrow \quad 1 < k < 2$

ii) $k = 1 \Rightarrow \quad 1 > 0$ 성립

$\therefore k$의 범위 : $1 \le k < 2$

31. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α,β이므로,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

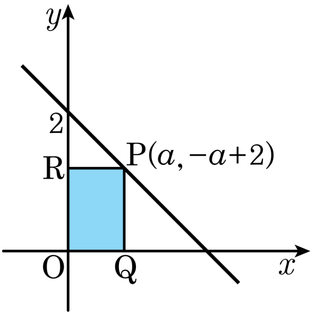
$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c,\ a=-b,\ c=-2a$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1,\ \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7\end{aligned}$$

32. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$ 이고 넓이는 y 이므로

$$\begin{aligned} y &= a(-a+2) = -a^2+2a \\ &= -(a^2-2a+1)+1 \\ &= -(a-1)^2+1 \end{aligned}$$

따라서 y의 최댓값은 1이다.

33. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 α, 방정식 $x^3=2$의 한 허근을 β라고 할 때, $x^3-2=(x-\beta)(x-\alpha\beta)p(x)$를 만족시키는 다항식 $p(x)$에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$의 값은?

① α　　② $\alpha\beta$　　③ α^2　　④ 0　　⑤ 1

해설

$\beta^3=2,\ (\alpha\beta)^3=\alpha^3\beta^3=2,$

$(\alpha^2\beta)^3=(\alpha^3)^2\cdot\beta^3=2$이므로

방정식 $x^3=2$의 근은 $\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta$이다.

따라서 $x^3-2=(x-\beta)(x-\alpha\beta)(x-\alpha^2\beta)$

$\therefore\ p(x)=x-\alpha^2\beta$

$$\begin{aligned}\therefore\ p(\alpha^5\beta)&=\alpha^5\beta-\alpha^2\beta\\&=\alpha^3\cdot\alpha^2\beta-\alpha^2\beta\\&=\alpha^2\beta-\alpha^2\beta\\&=0\end{aligned}$$