

1. n 이 자연수일 때, $\frac{18}{n}$ 도 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합은?

- ① 20 ② 21 ③ 33 ④ 39 ⑤ 49

해설

18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.
따라서 n 의 값의 합은 $1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$

2. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ 약수가 1 개뿐인 수를 소수라고 한다.
- ㉡ 133 은 합성수이다.
- ㉢ 소수의 개수는 유한개이다.
- ㉣ 3 과 1123 은 서로소이다.
- ㉤ 십의 자리의 숫자가 p , 일의 자리의 숫자가 q 인 수가 소수이면 pq 도 소수이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉣

해설

- ㉠ 약수가 1 과 자기 자신인 수를 소수라고 한다.
- ㉡ 133 의 약수는 1, 7, 19, 133 이므로 합성수이다.
- ㉢ 소수의 개수는 무한개이다.
- ㉣ 3 과 1123 의 최대공약수는 1 이므로 서로소이다.
- ㉤ $p \times q$ 의 약수가 1, p , q , $p \times q$ 이므로 소수가 아니다.

3. 다음 중 약수의 개수가 가장 적은 것은?

㉠ $19^3 \times 31$

㉡ 2×5^4

㉢ $3^2 \times 7 \times 11$

㉣ $3^2 \times 11^2 \times 13$

㉤ 19^9

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

㉠ $(3 + 1) \times (1 + 1) = 8$ (개)

㉡ $(1 + 1) \times (4 + 1) = 10$ (개)

㉢ $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

㉣ $(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)

㉤ $9 + 1 = 10$ (개)

4. 자연수 a 의 약수의 개수를 $A(a)$ 로 나타낸다고 한다. 이때, $\{A(225) + A(360)\} \times A(x) = 165$ 를 만족시키는 자연수 x 중에서 가장 작은 수는?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

$$225 = 3^2 \times 5^2, 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \text{ 에서}$$

$$A(225) = (2 + 1) \times (2 + 1) = 9$$

$$A(360) = (3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 24$$

$$\{A(225) + A(360)\} \times A(x) = 165$$

$$33 \times A(x) = 165$$

$$\therefore A(x) = 5$$

$$5 = 4 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{가장 작은 } x = 2^4 = 16$$

5. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

① 35

② 88

③ 2×3^3

④ $3^2 \times 7^3$

⑤ $2^2 \times 3^2 \times 5$

해설

- ① $35 = 5 \times 7$,
 $(1+1) \times (1+1) = 2 \times 2 = 4$ (개)
② $88 = 2^3 \times 11$,
 $(3+1) \times (1+1) = 8$ (개)
③ $(1+1) \times (3+1) = 2 \times 4 = 8$ (개)
④ $(2+1) \times (3+1) = 3 \times 4 = 12$ (개)
⑤ $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$ (개)

6. 다음 수를 약수의 개수가 적은 것부터 순서대로 나열한 것은?

보기

㉠ $2^5 \times 3$	㉡ $2^4 \times 5^2$
㉢ $2 \times 3 \times 7$	㉣ $2 \times 3 \times 5 \times 11$
㉤ $3^2 \times 5^3 \times 7$	

- ① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤
- ② ㉡, ㉢, ㉠, ㉤, ㉣
- ③ ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤
- ④ ㉢, ㉡, ㉤, ㉣, ㉠
- ⑤ ㉣, ㉠, ㉤, ㉡, ㉢

해설

㉠ 12 개 ㉡ 15 개 ㉢ 8 개 ㉣ 16 개 ㉤ 24 개
따라서 ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤ 순서이다.

7. $2^2 \times 5^{\square} \times 7$ 의 약수의 개수가 18 일 때 $\square$ 안에 들어갈 수는?

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$2^2 \times 5^{\square} \times 7$ 이므로

약수의 개수는

$$(2+1) \times (\square+1) \times (1+1) = 18 \text{ (개)}$$

$$\therefore \square = 2$$

8. $3^x \times 5^2 \times 20$ 의 약수의 개수가 72 일 때, x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$3^x \times 5^2 \times 20 = 2^2 \times 3^x \times 5^3$ 이므로
약수의 개수는
 $(2+1) \times (x+1) \times (3+1) = 72$ (개)
 $\therefore x = 5$

9. 20의 약수의 개수와 $3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$20 = 2^2 \times 5$ 의 약수의 개수는
 $(2+1) \times (1+1) = 6$ (개)이다.
 $3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수는
 $(2+1) \times (a+1) = 6$ (개)가 되어야 한다.
 $\therefore a = 1$

10. 자연수 288 의 약수의 개수와 자연수 $4 \times 3 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$288 = 2^5 \times 3^2$ 이므로

약수의 개수는 $(5 + 1) \times (2 + 1) = 18$ (개)

$4 \times 3 \times 7^a = 2^2 \times 3 \times 7^a$ 이므로

약수의 개수는

$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (a + 1) = 6 \times (a + 1)$ (개)

$6 \times (a + 1) = 18$ 이므로

$a + 1 = 3$

$\therefore a = 2$

11. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 $\square$ 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면?

- ① 3 ② 4 ③ 7 ④ 9 ⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)이다.

④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.

12. $27 \times \square$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다. $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 2 ② 2^2 ③ 2^3 ④ 3 ⑤ 3^2

해설

$3^3 \times \square$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1) \times (x+1) = 12$ (개) 이므로

$$(3+1) \times (x+1) = 4 \times (x+1) = 12$$

$$x+1 = 3 \quad \therefore x = 2$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^2$$

13. 소인수가 2개인 어떤 자연수가 있다. 이 자연수를 소인수분해한 결과 $\square \times 5^4$ 이고, 약수의 개수가 20개 일 때, 가장 작은 자연수이다.

$\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\square \times 5^4$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(x+1) \times (4+1) = 20$ (개) 이므로

$$(x+1) \times (4+1) = (x+1) \times 5 = 20$$

$$x+1 = 4 \quad \therefore x = 3$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^3 = 8$$

14. $20 \times \square$ 의 약수의 개수가 18개일 때, $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 4

② 8

③ 9

④ 25

⑤ 49

해설

(i) $\square = 2^a$ 일 때 $18 = (8 + 1) \times (1 + 1)$ 이므로

$$\square = 2^6 = 64$$

(ii) $\square \neq 2^a$ 일 때 $18 = (2 + 1) \times (a + 1) \times (1 + 1)$

$$a = 2, \text{ 가장 작은 자연수는 } 3^2 = 9$$

$\therefore$ (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

15. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

16. 어떤 자연수 n 에 대하여 $\frac{110}{2 \times n + 1}$ 이 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

110의 약수를 구해보면 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110이다.

그 중 홀수는 1, 5, 11, 55이다.

$2 \times n + 1 = 1$ 에서 $\therefore n = 0$

$2 \times n + 1 = 5$ 에서 $\therefore n = 2$

$2 \times n + 1 = 11$ 에서 $\therefore n = 5$

$2 \times n + 1 = 55$ 에서 $\therefore n = 27$

따라서 자연수 n 의 합을 구하면 $2 + 5 + 27 = 34$

17. 약수의 개수가 12 개인 수 중에서 가장 작은 수와 세 번째로 작은 수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

소인수가 1 개일 때, $12 = 11 + 1$ 이므로

$2^{11}, 3^{11}, \dots$

소인수가 2 개일 때, $12=4 \times 3=6 \times 2$

$2^3 \times 3^2 = 72, 2^2 \times 3^3 = 108, 2^3 \times 5^2 = 200, \dots$

$2^5 \times 3 = 96, 2^5 \times 5 = 160, \dots$

소인수가 3 개일 때, $12 = 3 \times 2 \times 2$

$2^2 \times 3 \times 5 = 60, 2^2 \times 3 \times 7 = 84, 2 \times 3^2 \times 5 = 90, \dots$

따라서 가장 작은 수는 60, 세 번째로 작은 수는 84이다.

$\therefore 84 - 60 = 24$

18. 두 자연수 a, b 에 대하여 $2 \times 5^a \times 11^b$ 의 약수가 12 개일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(1+1) \times (a+1) \times (b+1) = 12$$

$$(a+1) \times (b+1) = 6$$

$$a+1=2, b+1=3 \text{ 또는 } a+1=3, b+1=2$$

$$a=1, b=2 \text{ 또는 } a=2, b=1$$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

19. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$$

약수의 개수가 36 개이므로

A 가 될 수 있는 수는 $2^2, 3^3, 7^3$ 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.

따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,

두 번째로 작은 값은 5

$$\therefore 5 - 4 = 1$$