1. 직선 $x+2y+3=0$ 과 수직이고 점 $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-y-4=0$　　② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y-4=0$　　④ $3x-y-4=0$

⑤ $3x-2y-4=0$

해설

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 에 수직이므로, 기울기은 2

$(2,0)$ 을 지나므로,

$\Rightarrow\quad y=2(x-2)$

$\Rightarrow\quad y=2x-4$

2. 두 직선 $2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$의 교점과 $(1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x-y+3=0$　　② $x+y-6=0$

③ $4x-y+1=0$　　④ $x+2y-11=0$

⑤ $3x-2y+7=0$

해설

$2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$을
연립하여 교점을 구한다.
$\Rightarrow$ $(-2,-1)$
$\therefore$ $(-2,-1)$, $(1,5)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=\dfrac{5-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+5=2x+3$
$\therefore$ $2x-y+3=0$

3. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$　　② $-\frac{1}{3}<m<1$

③ $-1<m<2$　　④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$

⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots$ ㉠

$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

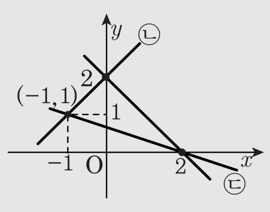
항상 점 $(-1,1)$을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$

와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m

은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

4. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

5. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$ ② $y=-\frac{2}{3}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=-\frac{4}{3}x$ ⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y=kx(k\neq 0)$ 이라 하면,
$(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 이므로
$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\ |2k-1|=\sqrt{k^2+1},\ k(3k-4)=0$
$k=\frac{4}{3}\ (\because k\neq 0)$
$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$

6. 세 직선 $l_1 : ax+y+2=0$, $l_2 : bx-3y-3=0$, $l_3 : (b+2)x+y-2=0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.
$(-a)\cdot\frac{b}{3}=-1, \quad \therefore\ ab=3\cdots$ ㉠
l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.
$-a=-b-2, \quad \therefore\ a-b=2\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 이용하면
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4+6=10$

7. 두 점 $A(-2,\ -1)$, $B(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\frac{3-(-1)}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x-1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

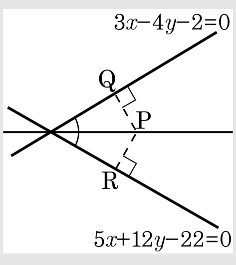
8. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

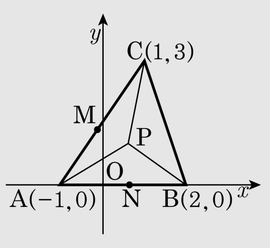
$\therefore a+b+c=-1$

9. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore \ \triangle BPC = \frac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

10. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단,$a > 0,\ a \neq 1$)

$y = ax, \quad y = -ax, \quad y = x + a$

① $a > \frac{1}{3}$ ② $a > \frac{2}{3}$ ③ $a > \frac{1}{2}$ ④ $a > 1$ ⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각구하면,

$\Rightarrow \quad (0,0), \ \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$

x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,

교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.

$a+1 > 0, \ \ a-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 1$

11. 점 $(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx-ay=1$이 항상 지나는 정점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

$(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직이므로

$3a+2b=6$

$\therefore\ b=3-\frac{3}{2}a \cdots$ ㉠

㉠을 $2bx-ay=1$에 대입하면

$2\left(3-\frac{3}{2}a\right)x-ay=1$

$(6-3a)x-ay=1$

$(6x-1)-(3x+y)a=0$

$\therefore\ 6x-1=0,\ 3x+y=0$

$x=\frac{1}{6},\quad y=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

12. 원점 O 와 점 $A(10,0)$ 으로부터 직선$3x+4y+30=0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

① 64 ② 72 ③ 80 ④ 81 ⑤ 90

해설

$\overline{OP} = \dfrac{|\,30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$

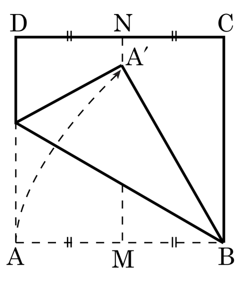
$\overline{AQ} = \dfrac{|\,30+30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 12$

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

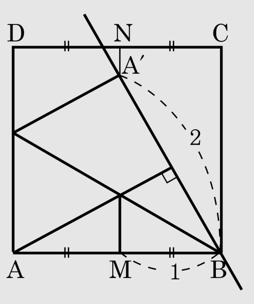
$S = \dfrac{1}{2}\cdot(\overline{OP}+\overline{AQ})\cdot\overline{PQ} = \dfrac{1}{2}\cdot(6+12)\cdot 8 = 72$

13. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이를 꼭지점 A 가 선분 MN 위에 놓이도록 접었을 때, 점 A 가 선분 MN 과 만나는 점을 A′ 이라 하자. 이 때, 점 A 와 직선 A′B 사이의 거리는? (단, M 은 선분 AB 의 중점, N 은선분 CD 의 중점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설



정사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 놓자.
점 M 을 원점으로 하고 직선 AB 를 x 축 위에 잡으면
$\overline{AM} = \overline{MB} = 1$ 이므로
$A(-1,\ 0),\ B(1,\ 0)$
$\overline{A'B} = \overline{AB} = 2$, $A'(0,\ \sqrt{3})$ 이다.
직선 A′B 의 방정식은 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$ 이므로,
점 A 에서 직선 A′B 사이의 거리는
$$\frac{\left|-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}} = \sqrt{3}$$

14. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y+2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x-y+2+k(x+y)=0$ 을 정리하면
$(1+k)x+(k-1)y+2=0$
원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k)=\frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2+2}$ 가 최소일 때,
즉 $k=0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의
최대값은 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

15. 두 점 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 직선의 x절편과 y절편의 합은?

① -10　② -4　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

$P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$y = -x + 5$

따라서 x절편은 5, y절편은 5이다.

$\therefore\ 5 + 5 = 10$