

1. 직선 $x + 2y + 3 = 0$ 과 수직이고 점 $(2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 4 = 0$

② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y - 4 = 0$

④ $3x - y - 4 = 0$

⑤ $3x - 2y - 4 = 0$

해설

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ 에 수직이므로, 기울기는 } 2$$

$(2, 0)$ 을 지나므로,

$$\Rightarrow y = 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 4$$

2. 두 직선 $2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ 의 교점과 $(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x - y + 3 = 0$

② $x + y - 6 = 0$

③ $4x - y + 1 = 0$

④ $x + 2y - 11 = 0$

⑤ $3x - 2y + 7 = 0$

해설

$2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ 을
연립하여 교점을 구한다.

$$\Rightarrow (-2, -1)$$

$\therefore (-2, -1)$, $(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{5 - (-1)}{1 - (-2)}(x - 1) + 5 = 2x + 3$$

$$\therefore 2x - y + 3 = 0$$

3. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} < m < 1$

② $-\frac{1}{3} < m < 1$

③ $-1 < m < 2$

④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$

⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{A}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

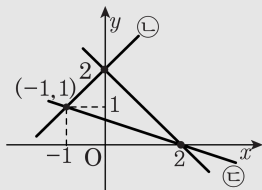
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{A}$ 의 기울기 m

은

$\textcircled{B}$ 의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$ 보다 작고

$\textcircled{C}$ 의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



4. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$$x^2 - x + 1 = x + k \text{ 에서 } \frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

5. 원점을 지나고, 점 (2, 1)에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$

② $y = -\frac{2}{3}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$

⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y = kx (k \neq 0)$ 이라 하면,

(2, 1)에서의 거리가 1이므로

$$\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, |2k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}, k(3k - 4) = 0$$

$$k = \frac{4}{3} (\because k \neq 0)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x$$

6. 세 직선 $l_1 : ax + y + 2 = 0$, $l_2 : bx - 3y - 3 = 0$, $l_3 : (b+2)x + y - 2 = 0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$(-a) \cdot \frac{b}{3} = -1, \quad \therefore ab = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.

$$-a = -b - 2, \quad \therefore a - b = 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 이용하면

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4 + 6 = 10$$

7. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1, 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

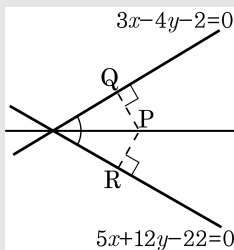
8. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

9. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$

② $\sqrt{2}$

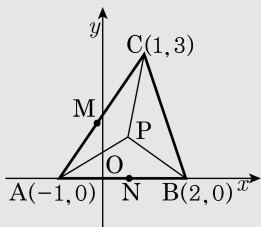
③ 2

④ $\sqrt{10}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

점 P 의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

10. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$y = ax, \quad y = -ax, \quad y = x + a$$

- ① $a > \frac{1}{3}$ ② $a > \frac{2}{3}$ ③ $a > \frac{1}{2}$ ④ $a > 1$ ⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각 구하면,

$$\Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$$

x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,

교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.

$$a+1 > 0, \quad a-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 1$$

11. 점 (a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx - ay = 1$ 이 항상 지나는 점의 좌표는?

- ① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

(a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직이므로

$$3a + 2b = 6$$

$$\therefore b = 3 - \frac{3}{2}a \cdots \text{㉠}$$

㉠을 $2bx - ay = 1$ 에 대입하면

$$2\left(3 - \frac{3}{2}a\right)x - ay = 1$$

$$(6 - 3a)x - ay = 1$$

$$(6x - 1) - (3x + y)a = 0$$

$$\therefore 6x - 1 = 0, 3x + y = 0$$

$$x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

12. 원점 O 와 점 $A(10, 0)$ 으로부터 직선 $3x + 4y + 30 = 0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

① 64

② 72

③ 80

④ 81

⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$

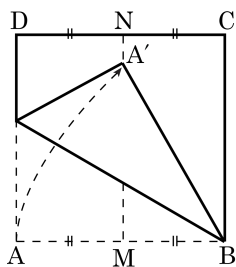
$$\overline{AQ} = \frac{|30 + 30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 12$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OP} + \overline{AQ}) \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (6 + 12) \cdot 8 = 72$$

13. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이를 꼭지점 A 가 선분 MN 위에 놓이도록 접었을 때, 점 A 가 선분 MN 과 만나는 점을 A' 이라 하자. 이 때, 점 A 와 직선 A'B 사이의 거리는? (단, M 은 선분 AB 의 중점, N 은 선분 CD 의 중점이다.)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

정사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 놓자.
 점 M 을 원점으로 하고 직선 AB 를 x 축
 위에 잡으면

$\overline{AM} = \overline{MB} = 1$ 이므로

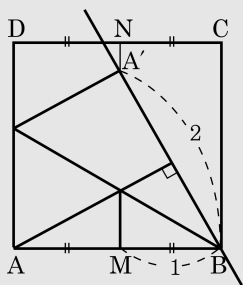
$A(-1, 0), B(1, 0)$

$\overline{A'B} = \overline{AB} = 2$, $A'(0, \sqrt{3})$ 이다.

직선 A'B 의 방정식은 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$
 이므로,

점 A 에서 직선 A'B 사이의 거리는

$$\frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$$



14. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y + 2 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최대값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x - y + 2 + k(x + y) = 0$ 을 정리하면

$$(1 + k)x + (k - 1)y + 2 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k) = \frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2 + (k-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 + 2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2 + 2}$ 가 최소일 때,

즉 $k = 0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의

$$\text{최대값은 } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

15. 두 점 A(1,2), B(3,4)로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 직선의 x 절편과 y 절편의 합은?

① -10

② -4

③ 0

④ 5

⑤ 10

해설

P(x , y)라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

$$y = -x + 5$$

따라서 x 절편은 5, y 절편은 5이다.

$$\therefore 5 + 5 = 10$$