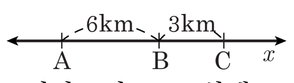
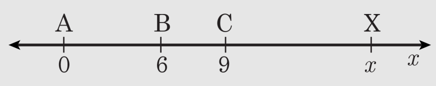
1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km ② 9 km ③ 12 km
④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0| = 2|x-9|$
곧, $|x| = 2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$
$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18-6 = 12$(km)

2. 좌표평면 위의 세 점 $A(2,\ 0)$, $B(3,\ a)$, $C(4,\ 2)$에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$일 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$이므로

$(3-2)^2 + (a-0)^2 = (4-3)^2 + (2-a)^2$

$1 + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2$

$4a = 4 \qquad \therefore a = 1$

3. 직선 $x+2y+3=0$ 과 수직이고 점 $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-y-4=0$ ② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y-4=0$ ④ $3x-y-4=0$

⑤ $3x-2y-4=0$

해설

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 에 수직이므로, 기울기은 2

$(2, 0)$ 을 지나므로,

$\Rightarrow \quad y=2(x-2)$

$\Rightarrow \quad y=2x-4$

4. 두 직선 $y = x + 1, y = -2x + 4$ 의 교점과 점 $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ ② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ③ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$
$y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$ 에서
두 직선의 교점을 지나는 방정식은
$(x - y + 1) + k(2x + y - 4) = 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로
$(-1 - 3 + 1) + k \cdot \{2 \cdot (-1) + 3 - 4\} = 0$
$\therefore\ k = -1$
따라서, $k = -1$ 을 ㉠에 대입하면
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

5. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$ ② $-2<m<3$ ③ $-1<m<2$
④ $1<m<4$ ⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

6. x축 위의 점 P로부터 직선 $4x+3y+2=0$까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면
P에서 직선까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\cdot\alpha+3\cdot0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$\therefore |4\alpha+2|=10$

$4\alpha+2=\pm10$

$\therefore \alpha=2,\ -3$

$\therefore$ 거리 l은 $l=2-(-3)=5$

7. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다. Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다. Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ　④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고 하면
$\dfrac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\dfrac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$
$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

8. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AP}}$의 1 : 3 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면
$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\dfrac{a+18}{1+3}, \dfrac{b+6}{1+3}\right)$
$x=\dfrac{a+18}{1+3}$, $y=\dfrac{b+6}{1+3}$
$a=4x-18$, $b=4y-6$
㉠에 대입하면,
$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

9. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$ ② $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ ④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$
Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$에서
$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$
두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

10. 세 점 $\mathrm{A}(6,2)$ $\mathrm{B}(0,-6)$, $\mathrm{C}(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

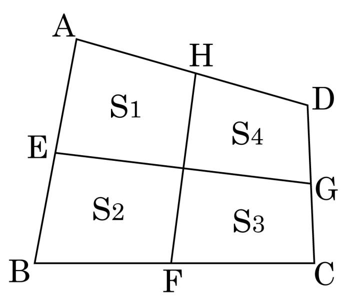
$\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$ 이므로 $\angle\mathrm{C}=90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 외심이다.

$\left(\frac{6+0}{2},\frac{2+(-6)}{2}\right)=(3,-2)$

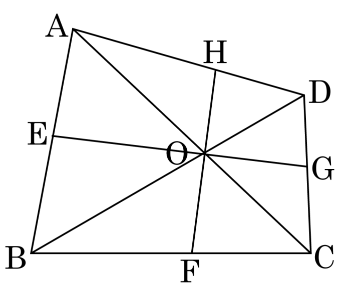
$\therefore\ 3ab=-18$

11. 다음 그림과 같이 내각의 크기가 모두 $180°$ 보다 작은 사각형 ABCD 가 있다.



네 변 AB, BC, CD, DA 의 중점을 각각 E, F, G, H 라 하고, $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 에 의하여 나누어진 사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 라 할 때, 다음은 S_1, S_2, S_3, S_4 사이의 관계를 찾는 과정이다.

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면,



점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로, $\triangle OAE = \boxed{(가)}$
또한, 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로, $\triangle OBF = \boxed{(나)}$
따라서 $S_2 = \triangle OAE + \boxed{(나)}$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$ ∴ $\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
② (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
③ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
④ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
⑤ (가) $\triangle OCG$ (나) $\triangle ODH$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

해설

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면
점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로
$\triangle OAE = \triangle OBE$
또한 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로
$\triangle OBF = \triangle OCF$
∴ $S_2 = \triangle OAE + \triangle OCF$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$
∴ $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

12. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 $(5, 6)$이고 무게중심 G의 좌표가 $(3, 4)$일 때, 변 $\overline{\text{BC}}$의 중점의 좌표는?

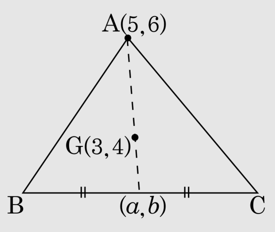
① $(1,\ 2)$　② $(2,\ 5)$　③ $(2,\ 3)$
④ $(3,\ 4)$　⑤ $(4,\ 5)$

해설

무게중심은 중선을 $2:1$로 내분한다.

$\therefore\ \text{G}\left(\dfrac{2a+5}{2+1},\ \dfrac{2b+6}{2+1}\right)=(3,\ 4)$

$\therefore\ a=2,\ b=3$



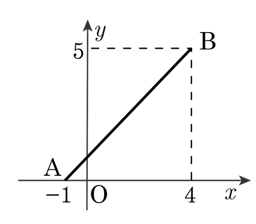
13. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{CA}}$ 의 중점이 각각 $(-1\ ,6\ )$, $(a\ ,b\ )$,$(3\ ,4\ )$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{CA}}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.
따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로
$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

14. 두 점 A(−1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$　② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$　④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

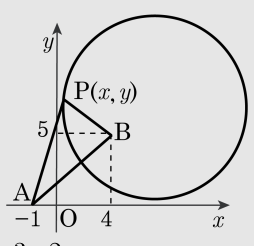
해설

점 P를 (x, y)라 두면

$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로



$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

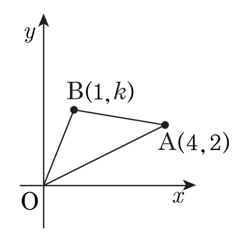
15. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P(−4, 6) ② P(−4, −6) ③ P(2, 3)
④ P(3, 2) ⑤ P(−2, −4)

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

16. 다음 그림과 같이 O(0,0), A(4,2), B(1,k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

직선 OA 의 방정식은 $x-2y=0$ 이다.
점 B(1, k) 에서 직선 $x-2y=0$ 까지의 거리

h 는 $h=\frac{|1\times 1-2\times k|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}\ (\because k>0)$

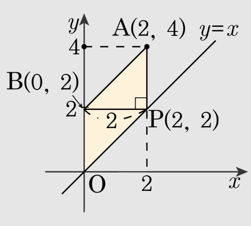
17. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 $A(2, 4)$, $B(0, 2)$로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ a)$으로 놓으면

$\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$



양변 제곱하여 정리하면

$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4$, $8a = 16$

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 다음 그림에서

(□ABOP의 넓이)

= (△OBP의 넓이) + (△ABP의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

18. 좌표평면 위의 네 점 $(-1,1)$, $(1,1)$, $(0,2)$, (a,b) 로 이루어진 사각형이 평행사변형이 될 때, 다음<보기> 중 (a,b) 가 될 수 있는 좌표의 개수는?

보기

㉠ $(2,2)$	㉡ $(1,2)$	㉢ $(0,0)$
㉣ $(-4,2)$	㉤ $(-2,2)$	㉥ $(0,3)$

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

평행사변형을 □ABCD 라 하면, 점 A, B, C, D를 어떻게 잡느냐에 따라 (a,b) 의 좌표가 달라진다.
<보기>의 좌표를 하나씩 찍어보면 평행사변형이 되는 경우는 (2, 2), (0, 0), (−2, 2) 3 가지가 있다.

19. 정점 A$(-2,\ 3)$과 직선 $y=2x-1$ 위의 동점 P를 잇는 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $y=x+\dfrac{13}{3}$ ② $y=2x+\dfrac{13}{3}$ ③ $y=3x+\dfrac{13}{3}$
④ $y=4x+\dfrac{13}{3}$ ⑤ $y=5x+\dfrac{13}{3}$

해설

점 P$(a,\ 2a-1)$, Q$(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{1\cdot a+2\cdot(-2)}{1+2}=\dfrac{a-4}{3}$

$y=\dfrac{1\cdot(2a-1)+2\cdot 3}{1+2}=\dfrac{2a+5}{3}$

여기에서 a를 소거하여 $x,\ y$의 관계식을 구하면

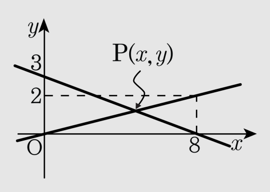
$\therefore\ y=2x+\dfrac{13}{3}$

20. 한 어린이가 길의 양쪽 모두에 가로등이 있는 길을 걷고 있던 중 그림자의 끝이 각각 가로등의 밑 부분과 일치하였다. 가로등의 길이는 각각 3 m, 2 m 이고, 두 가로등 사이의 거리는 8 m 일 때이 어린이의 키는 몇 m 인가 구하면? (단, 두 가로등과 어린이는 일직선 위에 있다.)

① 1.5 m ② 1.4 m ③ 1.3 m ④ 1.2 m ⑤ 1.1 m

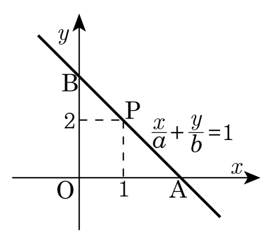
해설

두 직선의 교점은 두 직선의 방정식을 연립하여 구한다.
어린이의 키를 나타내는 값은 그림과 같이



$y=\dfrac{1}{4}x$와 $y=-\dfrac{3}{8}x+3$의 교점이 P 의 y좌표이므로
두 식을 연립하여 풀면 $x=4.8,\ \ y=1.2$
따라서, 어린이의 키는 1.2 m 이다.

21. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(1,2)$ 를 지나는 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이의 최솟값은?



① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 의 점 $(1,2)$ 를 지나므로

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$ 산술기하조건을 사용하면

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a} \times \dfrac{2}{b}}$

$\Rightarrow \quad ab \geq 8$

$\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab$ 이므로 넓이의 최솟값 : 4

22. 방정식 $15x^2-6xy-10x+4y=0$ 은 두 직선을 나타낸다. 이 두 직선의 교점을 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 것은?

① $3x-2=0$　　② $x+3=0$

③ $5x-2y=0$　　④ $4x-3y+6=0$

⑤ $6x+15y-29=0$

해설

준 식을 인수분해하면,$(3x-2)(5x-2y)=0$ $3x-2=0,\ 5x-2y=0$

이므로 이 두 직선의 교점은 $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 이다.

이 두 직선의 교점을 지나는 직선과 원점 사이의 거리가 최대일 때는

교점 $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 가 원점에서 직선에 내린 수선의 발일 때이므로

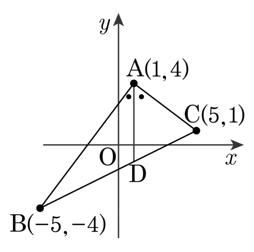
($\overline{OA}$ 의 기울기)$=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\frac{5}{3}=-\frac{2}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$\therefore\ \ 6x+15y-29=0$

23. 다음 그림과 같이 세점 A$(1, 4)$, B$(-5, -4)$, C$(5, 1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 가 있다. $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?



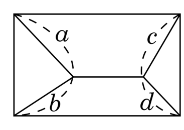
① $1:1$ ② $\sqrt{2}:1$ ③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$ ⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{\mathrm{BD}}$: $\overline{\mathrm{CD}}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}$
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$
$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$
$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ACD} = 2 : 1$

24. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $\sqrt{a}+\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{d}$ ② $a+c=b+d$

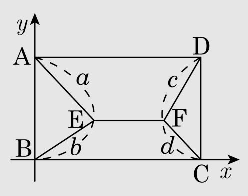
③ $a+b=c+d$ ④ $a^2+d^2=b^2+c^2$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면

A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.



이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$ 라고 하면

$a^2=x^2+(y-q)^2$

$b^2=x^2+y^2$

$c^2=(z-p)^2+(y-q)^2$

$d^2=(z-p)^2+y^2$ 이므로

$\therefore\ a^2+d^2=b^2+c^2$

25. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4　　② $\sqrt{5}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $3\sqrt{5}$　　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

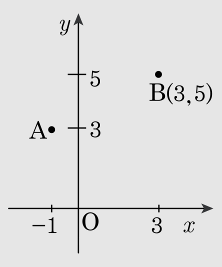
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

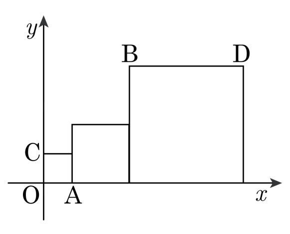
$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



26. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $A(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $B(21-12,\ 12)$

즉, $B(9,\ 12)$

$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

27. 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots$㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots$㉡

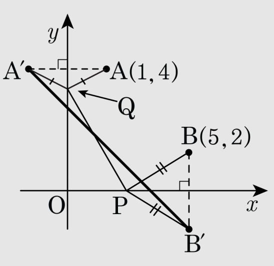
㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times2=2$

28. 두 점 $\mathrm{A}(1,4), \mathrm{B}(5,2)$ 에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이
라고 하면

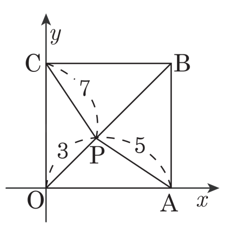


$\mathrm{A}'(-1,4), \mathrm{B}'(5,-2)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{B'P}}$$
$$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$$
$$= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

29. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}} = 3$, $\overline{\mathrm{AP}} = 5$, $\overline{\mathrm{CP}} = 7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$　② $\sqrt{65}$　③ $\sqrt{70}$
④ $5\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{5}$

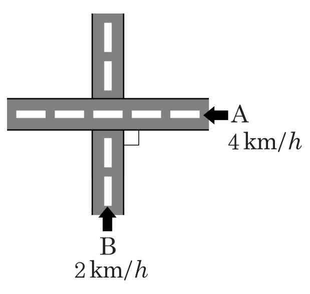
해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는
$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$이다.
㉡+㉢−㉠에서
$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$
따라서 $\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{65}$

30. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후
④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A$(6,\ 0)$, B$(0, -4)$ 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2-64t+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$$ 이므로

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.