

1. 두 점 A(4, -3), B(a, 3) 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 A(4, -3), B(a, 3) 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

2. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

3. 두 점 A(-3,2), B(4,5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

- ① (-3, 0) ② (1, 0) ③ (2, 0)

- ④ (-1, 0) ⑤ (5, 0)

해설

x축 위의 점을 P(x,0)라 하면
 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로
 $(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
 $14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, P(2, 0)

4. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
 $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \text{㉠}$
이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여
 $\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$
 $\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$
 $\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
 $\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은
2이다.

5. 두 점 $A(a, 4)$, $B(1, b)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P , y 축 위의 점 Q 라 하면, $\triangle OPQ$ 의 무게중심은 $G(-1, 1)$ 이다. 이때, $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$P(x, 0)$, $Q(0, y)$ 라 하면,

$$\frac{0+x+0}{3} = -1, \frac{0+0+y}{3} = 1 \text{에서}$$

$$x = -3, y = 3$$

$$\therefore P(-3, 0), Q(0, 3)$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{에서}$$

$$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$$

$$a^2 + 6a + 9 = b^2$$

$$\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2 \text{에서}$$

$$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$$

$$a^2 = b^2 - 6b + 9$$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

6. 다음 중 직선 $2x - 3y - 5 = 0$ 에 수직이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 있는 점은?

① $(3, -2)$

② $(3, -3)$

③ $(3, -4)$

④ $(3, -5)$

⑤ $(3, -6)$

해설

주어진 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$\therefore 3x + 2y - 1 = 0$$

그러므로 이 직선 위에 있는 점은 점 $(3, -4)$ 이다.

7. 두 직선 $kx + 2y + 3 = 0$, $2x + ky + 4 = 0$ 이 서로 평행하도록 양수 k 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
 y 절편은 달라야 한다.

$$\frac{k}{2} = \frac{2}{k} \neq \frac{3}{4} \quad \therefore k^2 = 4$$

따라서 양수 k 의 값은 2이다.

8. 두 직선 $2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ 의 교점과 $(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x - y + 3 = 0$

② $x + y - 6 = 0$

③ $4x - y + 1 = 0$

④ $x + 2y - 11 = 0$

⑤ $3x - 2y + 7 = 0$

해설

$2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ 을

연립하여 교점을 구한다.

$\Rightarrow (-2, -1)$

$\therefore (-2, -1)$, $(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{5 - (-1)}{1 - (-2)}(x - 1) + 5 = 2x + 3$$

$\therefore 2x - y + 3 = 0$

9. 서로 수직인 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점을 H 라 할 때, H 의 좌표는 ()이다. 따라서, 원점에서 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 까지의 거리는 ()이다. 위의 ()안에 알맞은 것을 차례대로 나열하면?

- ① $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}), \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}), \frac{4\sqrt{5}}{5}$
 ③ $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}), \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}), \frac{4\sqrt{5}}{5}$
 ⑤ $(1, 2), \sqrt{5}$

해설

두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점
 H 의 좌표는 $-\frac{1}{2}x + 2 = 2x, -x + 4 = 4x$
 이고 $x = \frac{4}{5}, y = \frac{8}{5}$ 이다. 즉, H $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ 이므로
 따라서 $OH = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{8}{5})^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

10. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$
② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$
③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$
④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

11. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

- ① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한 점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-5)^2\} \\ &\quad + \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} \\ &= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 60 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 8y + 16) + 10 \\ &= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 10\end{aligned}$$
따라서 $x = 3, y = 4$ 일 때 최솟값을 갖는다.

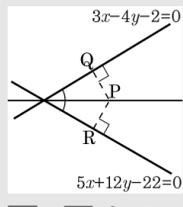
12. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

$$\text{즉, } 13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22) \text{ 또는}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22) \text{ 정리하면}$$

$$x - 8y + 6 = 0 \text{ 또는 } 8x + y - 17 = 0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

13. 점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $3x + 4y = 0$ ② $x - 2y + 5 = 0$ ③ $3x - 4y = 0$
④ $x + 2y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \dots \textcircled{1}$$

\overline{AP} 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

14. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2,3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 A(-2,3), Q(x, y)의 중점의 좌표를

P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$$2(2X+2) + (2Y-3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

15. 좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(-2, 2)$ 가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $O(0, 0)$ 이라 하면

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$$

$$= \overline{OA} + \overline{AB} \text{이므로}$$

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B 가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최소값은

$$\overline{OB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

16. 직선 $3x+y=8$ 이 두 점 $A(4, -3)$, $B(1, 2)$ 를 잇는 선분 AB 를 $1 : m$ 으로 내분할 때, 상수 m 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 점 $A(4, -3)$, $B(1, 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1 : m$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{4m+1}{m+1}, \frac{-3m+2}{m+1}\right)$ 이다.

이 점이 직선 $3x+y=8$ 위에 있으므로

$$3 \times \frac{4m+1}{m+1} + \frac{-3m+2}{m+1} = 8$$

따라서 $m=3$

17. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$, $(3, -1)$, $(5, 4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

- ① $(-1, 8), (-4, -2), (10, 2)$ ② $(0, 8), (4, 2), (10, 0)$
③ $(-1, 8), (4, 2), (10, 0)$ ④ $(-1, -8), (4, -2), (10, -2)$
⑤ $(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 로 놓으면,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2, \frac{x_2 + x_3}{2} = 3, \frac{x_3 + x_1}{2} = 5$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -4, x_2 + x_3 = 6, x_3 + x_1 = 10$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 3, \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \frac{y_3 + y_1}{2} = 4$$

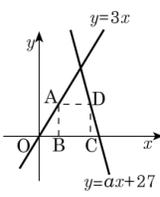
$$\therefore y_1 + y_2 = 6, y_2 + y_3 = -2, y_3 + y_1 = 8$$

$$\therefore y_1 = 8, y_2 = -2, y_3 = 0$$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

$(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)



- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는
 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4, y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

19. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a > 0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면 $ax-y=0$ 이 나머지 두 직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 $-2, 1$ 이므로
 $a = -2$ 또는 $1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$

ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
 $2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1, 1)$
 $ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
 $a = -1$ (부적당)

i), ii) 에서 $a = 1$

20. 좌표평면 위의 점 A(-1, 0) 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B(0, 2) 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

- ㉠ $-\frac{1}{2}$ ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ $\frac{1}{2}$ ㉤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m = 0$$

점 B(0, 2) 에서

$$\text{직선 } l \text{ 까지의 거리는 } \frac{|-2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

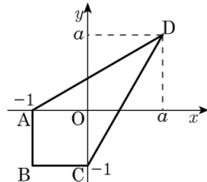
21. 네 점 $A(a, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, -3)$, $D(b, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되게 하는 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?
(단, $a > 0$)

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
 \overline{AC} 의 중점과 \overline{BD} 의 중점이 일치한다.
 즉, $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{3+b}{2}, \frac{1+(-2)}{2}\right)$ 에서 $\frac{a+2}{2} = \frac{b+3}{2}$
 $\therefore a-b=1 \dots \textcircled{1}$
 이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이어야 하므로
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $(3-a)^2 + (1-2)^2 = (2-3)^2 + (-3-1)^2$
 $a^2 - 6a + 10 = 17, a^2 - 6a - 7 = 0$
 $(a-7)(a+1) = 0$
 $\therefore a = 7 (\because a > 0)$
 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 6$
 $\therefore a + b = 13$

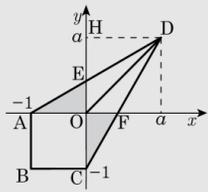
22. 좌표평면 위의 네 점 A(-1, 0), B(-1, -1), C(0, -1), D(a, a)를 꼭지점으로 하는 사각형 ABCD가 있다.



y축이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 양수 a의 값은?

- ① $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 ④ $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설



$\triangle AOE = \triangle COF$ 이므로 $\square ABCO = \square OFDE$ 이다.

따라서 $\triangle ODE = \frac{1}{2} \square ABCO = \frac{1}{2}$ 이다.

점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 E의 좌표를 $(0, k)$ 라 하면

$\triangle AOE \sim \triangle DHE$ 이므로

$\overline{AO} : \overline{DH} = \overline{OE} : \overline{HE}$ 에서

$1 : a = k : (a - k), ak = a - k$

$\therefore k = \frac{a}{a+1}$

$\triangle ODE = \frac{1}{2} \times \frac{a}{a+1} \times a = \frac{1}{2}$

$\frac{a^2}{a+1} = 1$ 에서 $a^2 - a - 1 = 0$ 이므로

$\therefore a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (\because a > 0)$

23. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y + 2 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x - y + 2 + k(x + y) = 0$ 을 정리하면

$$(1 + k)x + (k - 1)y + 2 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k) = \frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2 + (k-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 + 2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2 + 2}$ 가 최소일 때,

즉 $k = 0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의

$$\text{최대값은 } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$