1. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2}$$
$$= \sqrt{a^2-8a+52}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10(\because a>0)$

2. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

3. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$　② $(1,\ 0)$　③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$　⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로

$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$

$14x = 28$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

4. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-a)^2+(-5-3)^2=a^2+2a+65$$

$$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-3)^2+(3-7)^2=a^2-6a+25$$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(3+1)^2+(7+5)^2=160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$
$\therefore\ a^2-2a-35=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

5. 두 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 하면, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 무게중심은 $\mathrm{G}(-1, 1)$이다. 이때, $a-b$의 값을 구하면?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(0, y)$라 하면,

$\dfrac{0+x+0}{3} = -1$, $\dfrac{0+0+y}{3} = 1$에서

$x = -3$, $y = 3$

$\therefore \mathrm{P}(-3, 0), \mathrm{Q}(0, 3)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$

$a^2 + 6a + 9 = b^2$

$\overline{\mathrm{QA}}^2 = \overline{\mathrm{QB}}^2$에서

$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$

$a^2 = b^2 - 6b + 9$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

6. 다음 중 직선 $2x-3y-5=0$ 에 수직이고 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선 위에 있는 점은?

① $(3,-2)$ ② $(3,-3)$ ③ $(3,-4)$
④ $(3,-5)$ ⑤ $(3,-6)$

해설

주어진 직선의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$ 이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{3}{2}(x+1)$

$\therefore 3x+2y-1=0$

그러므로 이 직선 위에 있는 점은 점 $(3,-4)$ 이다.

7. 두 직선 $kx + 2y + 3 = 0$, $2x + ky + 4 = 0$이 서로 평행하도록 양수 k의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
y절편은 달라야 한다.

$$\frac{k}{2} = \frac{2}{k} \neq \frac{3}{4} \quad \therefore\ k^2 = 4$$

따라서 양수 k의 값은 2이다.

8. 두 직선 $2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$의 교점과 $(1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x-y+3=0$

② $x+y-6=0$

③ $4x-y+1=0$

④ $x+2y-11=0$

⑤ $3x-2y+7=0$

해설

$2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$을

연립하여 교점을 구한다.

$\Rightarrow\ (-2,-1)$

$\therefore\ (-2,-1)$, $(1,5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{5-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+5=2x+3$$

$\therefore\ 2x-y+3=0$

9. 서로 수직인 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=2x$ 의 교점을 H 라 할 때, H 의 좌표는 ( )이다. 따라서, 원점에서 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 까지의 거리는 ( )이다. 위의 ( )안에 알맞은 것을 차례대로 나열하면?

① $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{2\sqrt{5}}{5}$

② $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$

③ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{3\sqrt{5}}{5}$

④ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$

⑤ $(1,2), \sqrt{5}$

해설

두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=2x$ 의 교점

H 의 좌표는 $-\frac{1}{2}x+2=2x$, $-x+4=4x$

이고$x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{8}{5}$ 이다. 즉, H$\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 이므로

따라서 $\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

10. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

11. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5)　　② (3, 4)　　③ (2, 3)

④ (1, 2)　　⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

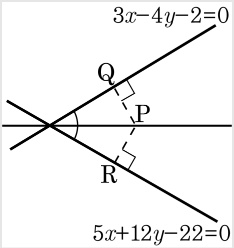
12. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ \ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

13. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$ ② $x-2y+5=0$ ③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$ ⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$$X=\frac{1+a}{2},\ Y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

14. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2, 3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$

② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$

④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2, 3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를 $\mathrm{P}(X,\ Y)$라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

16. 직선 $3x+y=8$이 두 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$를 잇는 선분 AB를 $1:m$으로 내분할 때, 상수 m의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1:m$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{4m+1}{m+1},\ \dfrac{-3m+2}{m+1}\right)$ 이다.

이 점이 직선 $3x+y=8$ 위에 있으므로

$$3\times\frac{4m+1}{m+1}+\frac{-3m+2}{m+1}=8$$

따라서 $m=3$

17. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$, $(3, -1)$, $(5, 4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1, 8), (-4, -2), (10, 2)$ ② $(0, 8), (4, 2), (10, 0)$

③ $(-1, 8), (4, 2), (10, 0)$ ④ $(-1, -8), (4, -2), (10, -2)$

⑤ $(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 로 놓으면,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2,\quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 3,\quad \frac{x_3 + x_1}{2} = 5$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = -4,\quad x_2 + x_3 = 6,\quad x_3 + x_1 = 10$$

$$\therefore\ x_1 = 0,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 3,\quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1,\quad \frac{y_3 + y_1}{2} = 4$$

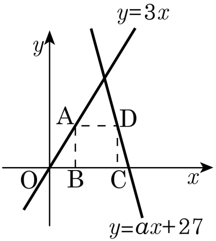
$$\therefore\ y_1 + y_2 = 6,\quad y_2 + y_3 = -2,\quad y_3 + y_1 = 8$$

$$\therefore\ y_1 = 8,\quad y_2 = -2,\quad y_3 = 0$$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

$(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y=3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y=ax+27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



① -4　② $-\frac{9}{2}$　③ -5

④ $-\frac{11}{2}$　⑤ -6

해설

$\overline{AB}=3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y=3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC}=3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y=ax+27$ 위의 점이므로 $x=4,\ y=3$를 대입하면 $3=a\times4+27$
$\therefore\ a=-6$

19. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
$a=-2$ 또는 1 $\therefore\ a=1\ (\because a>0)$

ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

i), ii) 에서 $a=1$

20. 좌표평면 위의 점 A$(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B$(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x+1)$

$\therefore\ mx - y + m = 0$

점 B$(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2 + 4m + 1 = 0$

$(2m+1)^2 = 0$

$\therefore\ m = -\dfrac{1}{2}$

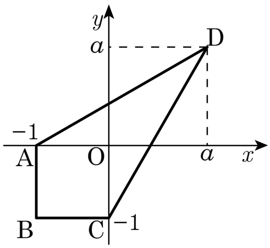
21. 네 점 $\mathrm{A}(a,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(2,\ -3)$, $\mathrm{D}(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{2+(-3)}{2}\right) = \left(\dfrac{3+b}{2},\ \dfrac{1+(-2)}{2}\right)$에서 $\dfrac{a+2}{2} = \dfrac{b+3}{2}$
$\therefore\ a-b=1 \cdots$ ㉠
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이어야 하므로
$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서
$(3-a)^2+(1-2)^2=(2-3)^2+(-3-1)^2$
$a^2-6a+10=17$, $a^2-6a-7=0$
$(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7(\because\ a>0)$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore\ a+b=13$

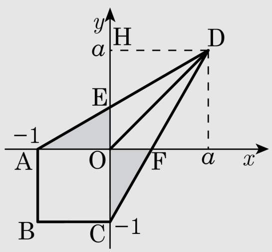
22. 좌표평면 위의 네 점 $A(-1,0)$, $B(-1,-1)$, $C(0,-1)$, $D(a,a)$를 꼭지점으로 하는 사각형 ABCD가 있다.



y축이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{\sqrt{5}}{2}$　③ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$　⑤ $\sqrt{5}$

해설



$\triangle$ AOE $=$ $\triangle$ COF이므로 $\square$ ABCO $=$ $\square$ OFDE이다.

따라서 $\triangle$ ODE $= \frac{1}{2}$ $\square$ABCO $= \frac{1}{2}$이다.

점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 E의 좌표를 $(0,k)$라 하면

$\triangle$AOE $\backsim$ $\triangle$DHE이므로

$\overline{AO} : \overline{DH} = \overline{OE} : \overline{HE}$에서

$1 : a = k : (a-k)$, $ak = a-k$

$\therefore\ k = \frac{a}{a+1}$

$\triangle ODE = \frac{1}{2} \times \frac{a}{a+1} \times a = \frac{1}{2}$

$\frac{a^2}{a+1} = 1$에서 $a^2 - a - 1 = 0$이므로

$\therefore a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\because\ a > 0)$

23. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y+2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x-y+2+k(x+y)=0$ 을 정리하면

$(1+k)x+(k-1)y+2=0$

원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k)=\frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2+2}$ 가 최소일 때,

즉 $k=0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의

최대값은 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$