1. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \overline{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \overline{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \overline{z} = 3i \cdot -3i = 9$

2. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면
$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$
$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0, \left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$
$\alpha+\beta=12$ 이므로
이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 의 합은
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

3. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + a - 3$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{11}{4}$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + a - 3 \\ &= (x+a)^2 - a^2 + a - 3 \end{aligned}$$

최솟값 $M = -a^2 + a - 3$

$$\begin{aligned} &= -\left(a^2 - a\right) - 3 \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 3 \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} \end{aligned}$$

따라서 m 의 최댓값은 $-\frac{11}{4}$ 이다.

4. 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 2초

▷ 정답: 20m

해설

$h = 20t - 5t^2 = -5(t-2)^2 + 20$

따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20 을 갖는다.

5. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

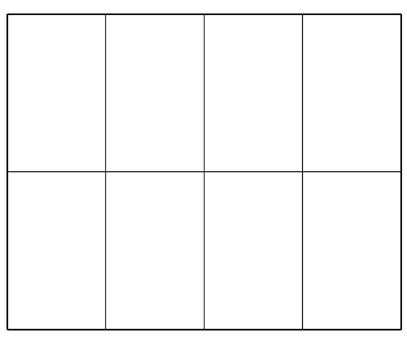
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \cdots\cdots$ ㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

6. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 $80\,\mathrm{m}^2$ 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)



① 16 m ② 17 m ③ 18 m ④ 19 m ⑤ 20 m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$3x + 5y = 70$

$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$

$\therefore$ 가로+세로$= 18$

7. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$　② $1-i$　③ $2+i$
④ $2-i$　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

8. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=1$

9. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

10. 방정식 $x^2+x+2=0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega)=3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12　② -12　③ 15　④ -15　⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$ 의 한 허근이 ω 이므로
$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$
$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$
$\qquad =(b-a)\omega+(12-2a)$
$f(\omega)=3\omega$ 이므로
$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$
$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because\ \omega$ 는 허수)
$\therefore\ a=6,\ b=9$

11. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

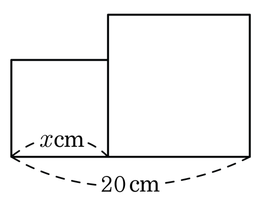
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 - 3$
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$
$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서
$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$
따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

12. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 10 cm

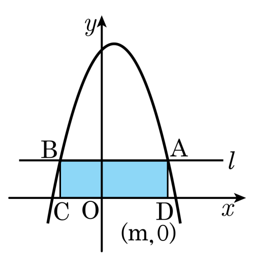
해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,
넓이를 y 라고 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (20 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= 2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

13. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은?$\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

14. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=xy \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=0 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$ 의 합 $x+y$ 의 값은? (단, $xy \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=0$ 에서

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ 이므로

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=0 \ \cdots ㉠ \\ \frac{u^2-2v}{v}=0 \quad \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{u^2-2v}{v}=\frac{v(v-2)}{v}=0$

$\therefore\ v=0$ 또는 $v=2$

그런데 주어진 조건에서

$v=xy\neq 0$ 이므로 $v=2$ 이다.

따라서, ㉠에서 $u=v=2$ 이므로

$x+y=2$

15. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

> ㈎ 두 근의 차는 홀수이다.
> ㈏ 적어도 한 근은 소수이다.
> ㈐ p^2-q는 소수이다.
> ㈑ $p+q$는 소수이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=p$ ……㉠
$\alpha\beta=q$ ……㉡이다.
그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.
$\therefore$ ㉠에서 $1+q=p$ $\therefore$ $p-q=1$
그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$일 때 뿐이다.
$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore$ $x=1,\ 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

16. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1,\ a + b)$, $(-3,\ -3a + b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,
즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, -3 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a - c = -2$, $d - b = -3$

$$\begin{aligned}\therefore\ h(x) &= g(x) - f(x)\\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b)\\ &= x^2 + 2x - 3\\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

17. 실수 x가 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$을 만족시킬 때, x^2+3x의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

분명히 $x \neq 0$이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1^2}{x}$$

$$=\left(x^2+\frac{1^2}{x}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)=0$$

$\therefore (x^2+3x+1)(x^2-x+1)=0$

x는 실수이므로 $x^2+3x+1=0$

$\therefore x^2+3x=-1$

18. x의 삼차방정식 $x^3+(1-2a)x^2+(a^2-a+1)x-a=0$이 허근을 갖는다고 할 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$f(x)=x^3+(1-2a)x^2+(a^2-a+1)x-a$라 놓으면 $f(a)=0$ 이므로

$f(x)=(x-a)\left\{x^2+(1-a)x+1\right\}=0$

이것이 허근을 가지려면 $x^2+(1-a)x+1=0$의 판별식 $\mathrm{D}<0$ 이어야하므로

$\mathrm{D}=(1-\mathrm{a})^2-4<0$　　$a^2-2a-3<0$　　$(a-3)(a+1)<0$

$\therefore\ -1<a<3$

$\therefore$ 정수 $a=0,\ 1,\ 2$

$\therefore\ 0+1+2=3$

19. $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{-2n} + w^{-n} + 1$의 값들의 합을 구하면? (단, n: 양의 정수)

① 0　② 3　③ 4　④ 1　⑤ −1

해설

$w^3 = 1,\ w^2 + w + 1 = 0$이므로

(i) $n = 3k$일 때

$(\text{준식}) = (w^3)^{-2k} + (w^3)^{-k} + 1 = 3$

(ii) $n = 3k + 1$일 때

$(\text{준식}) = (w^3)^{-2k} \cdot w^{-2} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-1} + 1$

$= \dfrac{w}{w^3} + \dfrac{w^2}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$

(iii) $n = 3k + 2$일 때

$(\text{준식}) = (w^3)^{-2k} \cdot w^{-4} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-2} + 1$

$= \dfrac{w^2}{w^6} + \dfrac{w}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$

$\therefore n = 3k$이면 3, $n \neq 3k$이면 0

$\therefore$준식의 값들의 합은 3

20. 두 방정식 $\begin{cases} ab+bc=44 \\ ac+bc=23 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$c(a+b)=23$ 에서 23은 소수이므로, 두 인수는 $1,\ 23$ 이다.
a, b 는 양의 정수이므로, $a+b>1$ 이고 $c=1,\ a+b=23$
이것을 처음 식에 대입하면
$a(23-a)+(23-a)=44,\ a^2-22a+21=0$
$\therefore\ (a,\ b)=(1,22),\ (21,2)$ 그러므로 만족하는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 는
$(1,\ 22,\ 1),\ (21,\ 2,\ 1)$ 의 2개이다.