1. 전체집합 U의 두 부분집합 A 와 B에 대하여 $A \cap B^c = A$, $n(A) = 9$, $n(B) = 14$일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$A \cap B^c = A - B = A$이므로 A, B는 서로소

$n(A \cap B) = 0$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 23$

2. $A=\{1,2,a+1\}$, $B=\{a-1,5\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{5\}$ 일 때, $A-B$ 는?

① $\varnothing$ ② $\{1,2\}$ ③ $\{1,3\}$ ④ $\{3,5\}$ ⑤ $\{5\}$

해설

$A\cap B=\{5\}$ 이므로 $a+1=5$, $a=4$ 이다.
따라서 $A=\{1,2,5\}$, $B=\{3,5\}$ 이므로 $A-B=\{1,2\}$ 이다.

3. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.
④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.
⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설
대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

4. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$ ② $R < Q < P$ ③ $Q < P < R$
④ $Q < R < P$ ⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

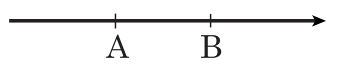
iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

5. 다음 그림과 같이 두 점 A , B 가 수직선 상에 위치해 있다. 선분 AB 를 $2 : 3$으로 내분하는 점을 D , 선분 AB 를 $2 : 3$ 으로 외분하는 점을 E , 선분 AB 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점을 F , 선분 AB 를 $3 : 2$ 로 외분하는 점을 G 라 하자. 점 D, E, F, G를 수직선 위에서 왼쪽부터 순서대로 적으시오.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 E

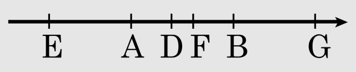
▷ 정답 : 점 D

▷ 정답 : 점 F

▷ 정답 : 점 G

해설

다음 그림에서 보듯이, 점의 순서는 $\mathrm{E}, \mathrm{D}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ 이다.



6. 재질이 고른 삼각형 모양의 널빤지를 좌표평면 위에 놓으니 세 꼭짓점의 좌표가 $A(9,7), B(2,3), C(7,5)$가 되었다. 손가락을 수직으로 세워 이 널빤지를 그 위에 얹을 때 수평이 되도록 하기 위한내부의 한 점의 좌표를 구하면?

① $(4,5)$ ② $(5,5)$ ③ $(5,6)$ ④ $(6,5)$ ⑤ $(6,6)$

해설

수평이 유지되기 위해선 무게중심에 손가락을 세워야한다.
따라서 무게중심 G는

$$G=\left(\frac{9+2+7}{3},\ \frac{7+3+5}{3}\right)=(6,\ 5)$$

7. $\{a\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 이고 원소의 개수가 3 개인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$\{a\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 이므로
a를 포함하는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 집합을 구하면 된다.
a를 제외한 $\{b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 집합을 구하면 $\{b,\ c\}, \{b,\ d\}, \{c,\ d\}$ 의 3개이므로, a 를 포함하는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합은 $\{a,\ b,\ c\}, \{a,\ b,\ d\}, \{a,\ c,\ d\}$의 3개이다.

8. 집합 A, B, C에 대하여 다음 중 $A-(B-C)$와 같은 집합은?

① $(A-B)-(A-C)$　　② $(A-B)\cap(A-C)$

③ $(A-B)\cup(A-C^c)$　　④ $(A\cap B)\cup(A-C)$

⑤ $(A\cup B)-(A\cup C)$

해설

$$\begin{aligned} A-(B-C) &= A\cap(B-C)^c \\ &= A\cap(B\cap C^c)^c \\ &= A\cap(B^c\cup(C^c)^c) \\ &= (A\cap B^c)\cup(A\cap(C^c)^c) \\ &= (A-B)\cup(A-C^c) \end{aligned}$$

9. 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$가 성립할 때, 실수 d의 최솟값 m과 최댓값 M의 합 $m+M$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$

$a+b+c=8-d$, $a^2+b^2+c^2=124-d^2$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ 이므로

$3(124-d^2) \geq (8-d)^2$

$372-3d^2 \geq d^2-16d+64$

$4d^2-16d+64-372 \leq 0$

$4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$

$\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$

$\therefore -7 \leq d \leq 11$

따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$

이므로 $m+M=-7+11=4$

10. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $A = B$ 이면 $A \subset B,\ B \subset A$

② $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$

③ $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$

④ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$

⑤ $n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}) - n(\{1,\ 2,\ 3\}) = 4$

해설

② $A = \{1,\ 2\},\ B = \{3,\ 4\}$ 이면
$n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$
③ $A = B$ 이면 $A \subset B$ 이지만
$n(A) < n(B)$ 가 아닌 $n(A) = n(B)$
⑤ $n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}) = 4$
$n(\{1,\ 2,\ 3\}) = 3$
$4 - 3 = 1$

11. 집합 $A = \{x \mid x < 20,\ x = 3n + 1(n$은 자연수$)\}$ 라고 할 때, 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 56 개

해설

$\mathrm{A} = \{4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19\}$이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이고, 이 중에서 홀수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 4, 10, 16 으로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$\therefore\ 64 - 8 = 56$ (개)

12. 임의의 양수 $a,\ b$에 대하여 부등식 $(a+b)^3 \le k(a^3+b^3)$ 이 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$(a+b)^3 \le k(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 이므로

$$k \ge \frac{(a+b)^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-3ab} = \frac{1}{1-3\times\frac{ab}{(a+b)^2}} \cdots ①$$

그런데 $a>0,\ b>0$ 이므로 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

$\therefore\ (a+b)^2 \ge 4ab$

$\therefore\ \frac{ab}{(a+b)^2} \le \frac{1}{4} \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$$k \ge \frac{1}{1-3\times\frac{1}{4}} = 4$$

$\therefore\ k$의 최솟값은 4