

1. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$x^2 - y^2 = 4 \text{ 에서 } y^2 = x^2 - 4 \dots\dots ⑦$$

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

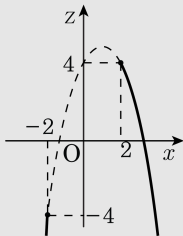
$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$$

$$= -(x-1)^2 + 5$$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2, x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

2. $x^2 + 2y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $4x + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

해설

$$x^2 + 2y^2 = 4 \text{에서 } 2y^2 = 4 - x^2$$

이때, y 는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x - 2)^2 + 8$$

$$(-2 \leq x \leq 2)$$

따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값 $m = -8$ 이고,

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $M = 8$ 이므로 $M + m = 0$

3. $x^2 + y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2y + x^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^2 + y^2 = 4 \text{에서 } x^2 = 4 - y^2$$

x, y 가 실수이므로

$$x^2 = 4 - y^2 \geq 0, y^2 \leq 4$$

$$\therefore -2 \leq y \leq 2$$

$2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$ 을 대입하면

$$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$$

$$= -y^2 + 2y + 4 = -(y - 1)^2 + 5$$

이 때, $-2 \leq y \leq 2$ 이므로 $y = 1$ 일 때

최댓값은 5, $y = -2$ 일 때 최솟값은 -4이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

4. 실수 x, y 가 $2x + y = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$

② $\frac{8}{5}$

③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{12}{5}$

⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x + y = 4$ 에서 $y = -2x + 4 \cdots \text{㉠}$

$$\begin{aligned}\text{㉠에서 } x^2 + y^2 &= x^2 + (-2x + 4)^2 \\ &= 5x^2 - 16x + 16 \\ &= 5\left(x^2 - \frac{16}{5}x\right) + 16 \\ &= 5\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}\end{aligned}$$

따라서 $x^2 + y^2$ 은 $x = \frac{8}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$ 을 갖는다.

5. 합이 12 인 두 수가 있다. 제곱의 합의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

두 수를 x , $12 - x$ 라 하고 두 수의 제곱의 합을 y 라 하면

$$y = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144.$$

$$= 2(x^2 - 12x + 36 - 36) + 144$$

$$= 2(x - 6)^2 + 72$$

따라서 $x = 6$ 일 때 최솟값 72 를 갖는다.

6. $2x + y = 8$ 일 때, $2xy$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$y = 8 - 2x$$

$$2xy = 2x(8 - 2x) = -4x^2 + 16x$$

$$= -4(x^2 - 4x + 4 - 4) = -4(x - 2)^2 + 16$$

따라서 $x = 2$, $y = 4$ 일 때, 최댓값은 16 이다.

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 이

두 실근을 가져야 하므로

$$D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) = -3a^2 - 8a - 4 \geq 0$$

$$(3a+2)(a+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots \textcircled{7}$$

근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a + 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1$$

$$= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ 에서

$a = -1$ 일 때 최솟값 0,

$a = -2$ 일 때 최댓값 1을 가지므로

최댓값과 최솟값의 합은 1이다.