

1. $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{10} + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8$ 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad 2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$(\omega^3)^3 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

2. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 의 양변에 } 2 \text{ 를 곱하면 } 2x = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\text{그러므로 } 2x - 1 = -\sqrt{3}i$$

$$\text{이 식의 양변을 제곱하면 } 4x^2 - 4x + 1 = -3$$

$$\text{즉, } 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{따라서, } x^2 - x + 1 = 0$$

3. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15} = 1$

㉢ $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$ 일 때, $z\bar{z} = \frac{7}{3}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ : $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, $\alpha^3 = 1$

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15}$

$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^2) + \cdots + \alpha^{15} = \alpha^{15}$

$= (\alpha^3)^5 = 1$ ($\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$)

㉢ : $\bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, $\alpha + \bar{\alpha} = -1$, $\alpha\bar{\alpha} = 1$

$z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} + 3}{2\bar{\alpha} + 1}$

$z\bar{z} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + 3(\alpha + \bar{\alpha}) + 9}{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1} = \frac{1 - 3 + 9}{4 - 2 + 1} = \frac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i, \alpha + 3 = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1} = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$
 $= -\frac{5i - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z \cdot \bar{z} = \frac{\sqrt{3} - 5i}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} + 5i}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

4. $z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$

② $-\sqrt{3}i$

③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{1 - 3i^2} \\ &= \frac{4}{-1 + \sqrt{3}i} \\ &= \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i} \end{aligned}$$

$$\therefore 2z + 1 = \sqrt{3}i \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

②의 양변에 $z - 1$ 을 곱해주면

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$$

$$\therefore z^3 = 1 \text{ 이므로 } z^4 = z$$

$$\therefore z^4 - \bar{z} = z - \bar{z}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

5. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned} & (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ &= \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ &= (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※ 방정식에 익숙한 학생들은

$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2 + z + 1 = 0$ 와 $z^3 = 1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned} & (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ &= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2 \\ &= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3 \\ &= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3 \\ &= 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

6. $z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$

② -1

③ 0

④ i

⑤ 1

해설

$$z = \frac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1, z^3 = -i, z^4 = 1$$

$$(\text{준식}) : 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$$

처음 네 항의 합 :

$$1 + i - 1 - i = 0$$

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$$

$$= z^{2008}$$

$$= (z^4)^{502}$$

$$= 1$$

7. $x = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 \cdot \bar{x} - x \cdot \bar{x}^3$ 의 값은? (단, $\bar{x}$ 는 x 의 켤레복소수이다.)

① $13i$

② $28\sqrt{3}i$

③ $28i$

④ $56\sqrt{3}i$

⑤ $72i$

해설

$x = 2 + \sqrt{3}i$ 에서 $\bar{x} = 2 - \sqrt{3}i$ 이므로

$$\begin{aligned}x^3 \cdot \bar{x} - x \cdot \bar{x}^3 &= x\bar{x}(x^2 - \bar{x}^2) = x\bar{x}(x + \bar{x})(x - \bar{x}) \\&= 7 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}i = 56\sqrt{3}i\end{aligned}$$

8. $x = \frac{1+3i}{1+i}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ 의 값은?

① $1+i$

② $1-i$

③ $-1+i$

④ $-1-i$

⑤ 1

해설

$$x = 2 + i$$

$$(x-2)^2 = i^2 = -1$$

$$\therefore x^2 - 4x = -5$$

$$(\text{준식}) = x(x^2 - 4x) + 4x + 1$$

$$= -5x + 4x + 1$$

$$= -x + 1$$

$$= -1 - i$$

9. $a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

② 0

③ 1

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $-1 + \sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2a + 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$$4a^2 + 4a + 1 = -3 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

양변에 $a - 1$ 를 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$$

$$\therefore a^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = a^3 a^2 + a^3 - 1$$

$$= a^2$$

$$= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0)$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

10. $x = -2 + i$ 일때, $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ 의 값은?

① $-15 + 5i$

② $-12 + 2i$

③ $14 - 4i$

④ $16 - 6i$

⑤ $18 - 8i$

해설

$x = -2 + i$ 에서 $x + 2 = i$ 의 양변을 제곱하면

$x^2 + 4x + 5 = 0$ 즉 $x^2 + 4x = -5$ 이므로

$$x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$= x(x^2 + 4x) - 3x + 2$$

$$= -5x - 3x + 2$$

$$= -8x + 2$$

$$= -8(-2 + i) + 2$$

$$= 18 - 8i$$

11. $x = \frac{3+i}{2}$ 일 때, $p = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ 의 값을 구하면?

① $2 + i$

② $2 - i$

③ $-2 + i$

④ $-4 + i$

⑤ $4 + i$

해설

$$x = \frac{3+i}{2} \text{ 에서 } 2x - 3 = i$$

$$(2x - 3)^2 = i^2 \text{ 에서 } 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면

$$2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$$

$$= (2x^2 - 6x + 5)(x + 2) + 2x - 7$$

$$= 2x - 7$$

$$= 2 \left(\frac{3+i}{2} \right) - 7$$

$$= -4 + i$$

12. $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② -1

③ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ 1

⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \bar{z} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2z + 1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$$z^2 + z + 1 = 0, (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\therefore z^3 = 1, \bar{z}^3 = 1$$

$$z^{2005} + \bar{z}^{2005} = (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z}$$

$$= z + \bar{z}$$

$$= -1$$