

1. 세 실수  $a, b, c$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a + b + c = 1, ab + bc + ca = 1, abc = 1$$

이 때,  $(a + b)(b + c)(c + a)$ 의 값은?

- ① 0      ② 1      ③ 2      ④ 3      ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & a + b + c = 1 \text{에서} \\ & a + b = 1 - c, b + c = 1 - a, c + a = 1 - b \\ & (a + b)(b + c)(c + a) \\ & = (1 - c)(1 - a)(1 - b) \\ & = 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc \\ & = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

2.  $x+y+z=1$ ,  $xy+yz+zx=2$ ,  $xyz=3$  일 때,  $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값을 구하면?

① -2    ② -1    ③ 0    ④ 1    ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}x+y+z &= 1 \text{에서} \\x+y &= 1-z \\y+z &= 1-x \\z+x &= 1-y \\(x+y)(y+z)(z+x) &= (1-z)(1-x)(1-y) \\&= 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

3.  $x+y+z = 4$ ,  $xy+yz+zx = 1$ ,  $xyz = 2$ 일 때,  $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16      ② 8      ③ 4      ④ 2      ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & (xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) \text{을} \\ & xy+yz+zx = 1 \text{을 이용하여 변형하면} \\ & (xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) \\ & = (1-zx)(1-xy)(1-yz) \\ & = 1 - (xy+yz+zx) + (x^2yz + xy^2z + xyz^2) - (xyz)^2 \\ & = 1 - (xy+yz+zx) + xyz(x+y+z) - (xyz)^2 \\ & = 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4 \\ & = 4 \end{aligned}$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c) \\ & = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \end{aligned}$$

4.  $x + y + z = 1$ ,  $xy + yz + zx = 2$ ,  $xyz = 3$  일 때,  $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & (x + 1)(y + 1)(z + 1) \\ &= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

5. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x) + (1+x+x^2+x^3)^3$$

- ① 3      ② 4      ③ 5      ④ 6      ⑤ 7

해설

- i)  $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수  
:  $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,  
계수= 2  
:  $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에  $x$ 를 곱할 때,  
계수= 1
- ii)  $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수  
 $x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,  
 $(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$   
 $3Y=3x+3x^2+3x^3$   
일차항의 계수= 3, 다른 항에는 일차항이 없다.
- i), ii)에서  $2+1+3=6$

6.  $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서  $x^3$ 의 계수는?

- ① 0      ② 2      ③ -2      ④ 4      ⑤ -4

해설

$x^3$ 을 만들 수 있는 것은

(3차항) $\times$ (상수항), (2차항) $\times$ (1차항)

2쌍씩이다.

$$4 \times 1 \times 2 + (-3) \times 2 \times 2 = 8 + (-12) = -4$$

7.  $(10^5 + 2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

- ① 15      ② 18      ③ 21      ④ 26      ⑤ 28

해설

$$\begin{aligned} & \text{준식을 전개하면} \\ & 10^{15} + 2^3 + 3 \times 2 \times 10^5(10^5 + 2) \\ & = 10^{15} + 2^3 + 6 \times 10^{10} + 12 \times 10^5 \\ & = 10^{15} + 10^{10} \times 6 + 10^5 \times 12 + 8 \\ & \therefore 1 + 6 + 1 + 2 + 8 = 18 \end{aligned}$$

8.  $a = 2004, b = 2001$  일 때,  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  의 값은?

- ① 21      ② 23      ③ 25      ④ 27      ⑤ 29

해설

준 식은  $(a - b)^3$  이다.  
 $a - b = 2004 - 2001 = 3$   
 $\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

9.  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고  $abc = 1$  일 때,  $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1      ② 4      ③ 9      ④ 16      ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

10. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

- ① 144    ② 196    ③ 288    ④ 308    ⑤ 496

해설

세 모서리를  $x, y, z$ 라 하면

$$x + y + z = 22 \cdots \cdots ①$$

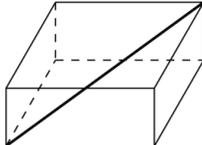
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14 \cdots \cdots ② \text{이고}$$

겉넓이는  $2(xy + yz + zx)$ 이다.

$$①, ② \text{에서 } 22^2 = 14^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 288$$

11. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겹넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각  $a, b, c$  라 할 때,  $a^3 + b^3 + c^3$  의 값은?



- ① 12      ② 18      ③ 21      ④ 23      ⑤ 30

해설

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^2 = 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \dots \textcircled{1}$$

①에 각각 대입하면

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 23$$

12. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5      ②  $\sqrt{29}$       ③  $\sqrt{33}$       ④ 6      ⑤  $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를  $a, b, c$  라 하면

$$2(ab + bc + ca) = 52$$

$$4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9$$

(직육면체 대각선의 길이)

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}$$

$$= \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29}$$

13.  $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때,  $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ , 양변에  $x + 1$ 을 곱하면,

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1 \text{에서 } x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \dots \dots \textcircled{1}$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 를  $x$ 로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

14.  $x - \frac{1}{x} = 1$  일 때,  $x^5 + \frac{1}{x^5}$  의 값은 ?

①  $\pm 6\sqrt{5}$

②  $\pm 5\sqrt{5}$

③  $\pm 3\sqrt{5}$

④  $\pm 2\sqrt{5}$

⑤  $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ = \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm\sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm\sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

15.  $x + \frac{1}{x} = 1$ 일때,  $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

- ① 1      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 7

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 - 3 = -2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x}$$

$$(-1) \times (-2) = x^5 + \frac{1}{x^5} + 1$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

해설

$x + \frac{1}{x} = 1$ 의 양변에  $x$ 를 곱하면

$$x^2 - x + 1 = 0, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1, \frac{1}{x^3} = -1$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -x^2 - \frac{1}{x^2} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -(-1) = 1$$