1. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0,\ b < 0$ ② $a > 0,\ b > 0$ ③ $a \geq 0,\ b > 0$
④ $a < 0,\ b < 0$ ⑤ $a \leq 0,\ b < 0$

해설
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

2. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=-\sqrt{12}$ ② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=-\sqrt{12}$ ④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}=\sqrt{12}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

3. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$　　② $-\sqrt{15}$　　③ $\sqrt{15}i$
④ $-\sqrt{15}i$　　⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

4. $\dfrac{\bar{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\bar{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하면?

① ±1　② $\pm2i$　③ ±2　④ $\pm i$　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z=a+bi \\ z=a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\bar{z}}=i$$

$$\frac{\bar{z}^2+\bar{z}+z^2-z}{z\bar{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$

5. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=9$일 때, $\dfrac{z}{1+\sqrt{2}i}$ 의 실수 부분의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)

$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a=6$, $a=3$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=9$, $b=0$

$z=3$

$$\frac{z}{1+\sqrt{2}i}=\frac{3}{1+\sqrt{2}i}=\frac{3(1-\sqrt{2}i)}{3}=1-\sqrt{2}i$$

$\therefore$ 실수부 : 1

6. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $3-2i$　　② $-3+i$　　③ $3+i$

④ $-3-2i$　　⑤ $3-i$

해설

복소수 $z=x+yi(x,\ y$ 는 실수$)$라 놓으면

$\bar{z}=x-yi$

따라서, 주어진 식은

$(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$

$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$

$(x-3y)+(x-y)i=3-i$

복소수의 상등에 의하여 $x-3y=3$, $x-y=-1$

$\therefore\ x=-3,\ y=-2$

$\therefore\ z=-3-2i$

7. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $2z+3\bar{z}=5-2i$를 만족하는 복소수 z의 역수는?

① $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$ ② $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ③ $-1-2i$

④ $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ ⑤ $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 두면

$2z+3\bar{z}=5-2i$

$2(a+bi)+3(a-bi)=5-2i$

$5a-bi=5-2i$

복소수 상등에 의하여

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ z=1+2i$

(z의 역수)$=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

8. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다.
② 단 한 개 있다.
③ 두 개 뿐이다.
④ 세 개 뿐이다.
⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수)
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$
$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$
$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 무수히 많으므로
주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

9. 임의의 복소수 a, b 에 대하여 연산 □를 $a \square b = (a+b) - ab$ 로 정의할 때, $z \square i = 3 + 2i$ 를 만족하는 복소수 z 는?

① $-1+2i$ ② $1+2i$ ③ $3+2i$

④ $5+2i$ ⑤ $7+2i$

해설

$z \square i = z + i - zi = (1-i)z + i$ 에서

$(1-i)z + i = 3 + 2i$

$(1-i)z = 3 + i$

$$\therefore\ z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

10. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$

$(\overline{x+yi}) = \dfrac{5(1-i)}{2+i} = 1-3i$

$x+yi = 1+3i$

$a = 1,\ b = 3$

$\therefore\ a+2b = 7$

11. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2 - 2i$　　② $2 \pm 3i$　　③ $2 \pm \sqrt{3}i$
④ $3 \pm 2i$　　⑤ $4 \pm 3i$

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
$z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 에서
$(a + bi)(a - bi) = 13$, $(a + bi) + (a - bi) = 4$
$a^2 + b^2 = 13$, $2a = 4$
$\therefore\ A = 2,\ b = \pm 3$
$z = 2 \pm 3i$

12. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+i)z-2i\bar{z}=5-3i$를 만족하는 복소수 z는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$ ④ $2-i$ ⑤ $1-2i$

해설

임의의 복소수 $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(1+i)(a+bi)-2i(a-bi)=5-3i$

$a+bi+ai-b-2ai-2b=5-3i$

$(a-3b)+(-a+b)i=5-3i$

$$\begin{cases} a-3b=5 \\ -a+b=-3 \end{cases}$$

연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$\therefore\ z=2-i$

13. $A = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \ \cdots \ + A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$　② 1　③ 0　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$A = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$1 + A + A^2 + A^3 + \ A^4 + \cdots + A^{2005}$

$= 1 + \{(-i) + (-1) + i + 1\} + \cdots + (-i)$

$= 1 - i$

14. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{-2i}{2}=-i$, $i^4=1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100} &= \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{50}\\ &= (-i)^{50}\\ &= ((i)^4)^{12}\cdot i^2\\ &= -1\end{aligned}$$

15. $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $1 - i$　② $1 + i$　③ $-i$　④ i　⑤ 1

해설

$i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$

$i^4 = 1$ 이므로

$i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = i^2 = -1,$

$i^{4k+3} = i^3 = -i, i^{4k} = i^4 = 1$

(준식) $= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i + i^2 + i^3 + i^4) + \cdots + (i + i^2 + i^3 + i^4) + i$

$= 1 + i$

16. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$

$f(i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}=(-i)^{30}=(i^4)^7 i^2$

$=-1 f(-i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=i^{30}$

$=(i^4)^7 i^2=-1$

$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$

$=f(i)+f(-i)=-1-1=-2$

17. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2006}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① -1 ② 1 ③ $-i$ ④ i ⑤ 1998

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{1+2i+(i)^2}{2}$$
$$=i$$
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2006}=(i)^{2006}=(i^4)^{501}i^2=-1$$

18. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1 이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $i,\ -i$ ④ -1 ⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로
$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1 이 홀수 개가 있다.
(i) -1 이 $4k+1$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 개일 때
$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$
(ii) -1 이 $4k+3$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 개일 때
$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$
따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

19. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식) $=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}$

$=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{4n}+\left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^{4n}$

$=i^{4n}+(-i)^{4n}=2\cdot i^{4n}$

$=2\cdot(i^4)^n=2\cdot 1^n=2$

20. n 이 자연수일 때, $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^n = 0$ 을 만족하는 n 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$n = 1$ 일 때,

$$\frac{\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{2}(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$n = 2$ 일 때, $\frac{2}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1-i)^2} = \frac{2}{2i} + \frac{2}{-2i} = 0$

그러므로 최솟값 $n = 2$

21. 복소수 $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 z^2 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $z^2=i$

해설

$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 이므로 $z^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$

22. $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{101}=(a+bi)z$를 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 a^2+b^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z^2=-i$, $z^4=-1$
$z^{101}=(a+bi)z$ 에서 양변을 z 로 나누면
$z^{100}=a+bi$, $(z^4)^{25}=(-1)^{25}=a+bi$
$\therefore a+bi=-1 \Rightarrow a=-1, b=0$
$\therefore a^2+b^2=1$

23. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1　　② -1

③ $\sqrt{-1}$　　④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

24. $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$
$=f(i^2)+f((-i)^2)$
$=f(-1)+f(-1)$
$=0$

25. 복소수 z에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$은 양의 정수인 z의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$

$m = 1, n = 2, z = i - 1$

$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$

$m = 1, n = 4, z = i + 1$

$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i-1$	0	$i+1$
2	$-1+i$	-2	$-1-i$	0
3	0	$-i-1$	$-2i$	$-i+1$
4	$1+i$	0	$1-i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

$\therefore$ 9 개

26. $f(x) = x^{2008} - 1$라 할 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0

④ $-2-i$　　⑤ $-2+2i$

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i,\ \frac{1-i}{1+i} = -i$

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = f(i) + f(-i)$

$= i^{2008} - 1 + (-i)^{2008} - 1$

$= i^{4\times 502} + (i)^{4\times 502} - 2$

$= 1 + 1 - 2 = 0$

27. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

① $-26 - 25i$ ② $-26 + 25i$ ③ 0

④ $-25 + 26i$ ⑤ $25 + 26i$

해설

$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$

$= \left\{i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) + 4 \cdot 1\right\} + \left\{5i + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-i) + 8 \cdot 1\right\}$

$+ \cdots + \left\{45i + 46 \cdot (-1) + 47 \cdot (-i) + 48 \cdot 1\right\} + 49i + 50 \cdot (-1)$

$12(2 - 2i) + 49i - 50 = -26 + 25i$

28. 다음 중 그 값이 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{114}$ 의 값과 같은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $i+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$

② $i+i^4+i^7+i^{10}+i^{13}+i^{16}$

③ $i^2+i^5+i^8+i^{11}+i^{14}+i^{17}$

④ $i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}+i^{18}$

⑤ $\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4+\frac{1}{i}^5+\frac{1}{i}^6$

해설

i^n 의 주기성을 묻는 문제이다.

$i=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

이므로 곱에 대하여 주기가 4 인 규칙을 지닌다.

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8) \\
&\quad +\cdots+(i^{109}+i^{110}+i^{111}+i^{112})+i^{113}+i^{114} \\
&= (i-1-i+1)+(i-1-i+1) \\
&\quad +\cdots+(i-1-i+1)+i-1 \\
&= i-1
\end{aligned}
$$

① (준식) $=(i-i+i-i)+i-i=0$

② (준식) $=(i+1-i-1)+i+1=i+1$

③ (준식) $=(-1+i+1-i)-1+i=-1+i$

④ (준식) $=(-i-1+i+1)-i-1=-i-1$

⑤ (준식) $=(-i-1+i+1)-i-1=-i-1$

29. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$의 값은?

① 0　② i　③ $-2i$　④ -1　⑤ -2

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$ 이므로

$f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)+f(i)$

$=(-i)^{1998}+(i)^{1998}$

$=(-i)^{1996}\cdot(-i)^2+i^{1996}\cdot i^2=-2$

30. $f(x)=x^{61}+x^{47}+1$ 이라고 할 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=f(-i)=(-i)^{61}+(-i)^{47}+1=1$

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=i^{61}+i^{47}+1=1$

31. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.
$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

32. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $z+3i=\overline{z-zi}$ 를 만족하는 복소수 z 를 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$z=a+bi$ 라 할 때,

(좌변): $z+3i=a+(b+3)i$

(우변): $z-zi=(a+bi)-(a+bi)i$

$=(a+b)+(b-a)i$

$\therefore\ \overline{z-zi}=(a+b)-(b-a)i$

(좌변) = (우변) 이므로,

$a+(b+3)i=(a+b)+(a-b)i$

$$\begin{cases} a+b=a \\ a-b=b+3 \Rightarrow a=3,\ b=0 \end{cases}$$

$\therefore\ z=3+0\cdot i=3$

33. $\alpha = -2 + i$, $\beta = 1 - 2i$ 일 때 $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \alpha(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \beta(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (-1 - i)(-1 + i)$
$= 2$

34. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w=\frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하면?

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=2$

$$\begin{aligned} w\overline{w} &= \frac{z+1}{3z-2}\times\frac{\overline{z}+1}{3\overline{z}-2} \\ &= \frac{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}{9z\overline{z}-6(z+\overline{z})+4} \\ &= \frac{2+1+1}{18-6+4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

35. $z = 1 + i$ 일 때, $\frac{z\bar{z}}{z - \bar{z}}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1 + i$ ② $1 - i$ ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$z = 1 + i$ 이면 $\bar{z} = 1 - i$ 이다.

$\therefore \quad \frac{z\bar{z}}{z - \bar{z}} = \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i) - (1-i)} = \frac{2}{2i} = \ -i$

36. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}(\alpha+\beta) + \overline{\beta}(\alpha+\beta) \\
&= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) \\
&= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) \\
&= (1+i)(1-i) \\
&= 2
\end{aligned}$$

37. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2　　② -1　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1\\ &= (a+b+1) - (a-b)i\\ &= a - bi\end{aligned}$$ 에서

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

38. $z=1-i$ 일 때, $\dfrac{\overline{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \overline{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{2i}{2}=i$

39. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{i-2}=i+2$

② $\overline{2i}=-2i$

③ $\overline{\sqrt{2}+i}=\sqrt{2}-i$

④ $\overline{1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

⑤ $\overline{3-2i}=3+2i$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호가 바뀐다.
실수의 켤레복소수는 자기자신이다.
① $\overline{i-2}=-i-2$

40. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ 2　④ 1　⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \qquad \therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ a+b=-1$

41. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$　② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$　③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$　⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= 3x \\ &= \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)\end{aligned}$$

42. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$ ② $-i$ ③ i

④ -1 ⑤ 1

해설

$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$

$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$

$= -x^2 - x - 1 \ (\because \ x^2 + 2x + 2 = 0)$

$= -(-2x - 2) - x - 1$

$= x + 1 = i$

43. $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$　　③ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)\,(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore\ x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x\ (\because x^2 - x + 1 = 0)$

$= \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$$
$$= -x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

44. $x=\dfrac{3+i}{2}$ 일 때, $p=2x^3-2x^2-5x+3$ 의 값을 구하면?

① $2+i$ ② $2-i$ ③ $-2+i$

④ $-4+i$ ⑤ $4+i$

해설

$x=\dfrac{3+i}{2}$ 에서 $2x-3=i$

$(2x-3)^2=i^2$ 에서 $2x^2-6x+5=0$

나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면

$2x^3-2x^2-5x+3$

$=(2x^2-6x+5)(x+2)+2x-7$

$=2x-7$

$=2\left(\dfrac{3+i}{2}\right)-7$

$=-4+i$

45. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1\ (\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1\ )$

해설

$\alpha+1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

(준식) $=A^{10}+B^{10}=\left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B$

$=-(A+B)$

$=-1$