1. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8　　② -2　　③ 1　　④ 4　　⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

2. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$　　② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$　　④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\
 & & 1 & 1 & 1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

3. $x(x-1)(x+1)-6=0$의 세근을 구하면?

① $2,\ -1,\ -3$　② $-2,\ 1,\ -3$　③ $2,\ 1,\ -3$

④ $-2,\ -1\pm\sqrt{2}i$　⑤ $2,\ -1\pm\sqrt{2}i$

해설

준식$=x(x^2-1)-6=x^3-x-6=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore\ x=2, -1\pm\sqrt{2}i$

4. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)
⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은
$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$
$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$
$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

5. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\
 & & -1 & 3 & -4 & 4 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\
 & & 2 & -2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$

따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

6. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2+2ax+a=0$이 중근을 갖도록 하는 양수 a의 값과 그 때의 중근 α의 값의 합 $a+\alpha$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

조립제법을 이용한다 $f(-1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 2a & a \\ & & -1 & -a & -a \\ \hline & 1 & a & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x^2+ax+a)=0$

$x^2+ax+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 0이 아니므로

x^2+ax+a가 중근을 갖는다.

중근일 조건 : 판별식$=0$

$\therefore \quad a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$ 또는 $a=4$

$\therefore$ 양수 $a=4 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+4=0(x+2)^2=0$

$\Rightarrow$ 중근 $\alpha=-2 \Rightarrow \quad a+\alpha=2$

7. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$　　② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$　　④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \dfrac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

8. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2+x-12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\therefore\ -4+1+3 = 0$

9. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

10. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　② 20　③ 10　④ 7　⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

11. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

12. 방정식 $x^6-1=0$의 해가 아닌 것은?

① -1 ② 1 ③ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x=-1,\ 1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

13. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ② $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$
④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

14. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면
$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$
$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$
$\therefore\ \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$

15. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3 &= t^2-8t+12+3\\ &= t^2-8t+15\\ &= (t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

16. x에 관한 방정식 $x^{1998}+10x-3=0$의 모든 근(1998개)에 대하여 각각의 근을 1998 제곱한 합을 구하면?

① 0　　② -10　　③ 5994
④ -5994　　⑤ -59940

해설

$x^{1998}+10x-3=0$의 각각의 근을 $x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_{1998}$이라 하면
$x^{1998}=-10x+3$ 에서
$x_1^{1998}=-10x_1+3$, x_2^{1998}
$=-10x_2+3$, x_3^{1998}
$=-10x_3+3\cdots\ {x_{1998}}^{1998}$
$=-10x_{1998}+3$
$\therefore\ {x_1}^{1998}+{x_2}^{1998}+{x_3}^{1998}+\cdots {x_{1998}}^{1998}$
$=-10(x_1+x_2+x_3+...+x_{1998})+3\times 1998$
$=0+3\times 1998=5994$ ($\because\ x_1+x_2+\cdots x_{1998}=0$)

17. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

18. $f(x) = x^3 - p$, $g(x) = x^3 - 2x$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 p로 바르게 나타낸 것은?

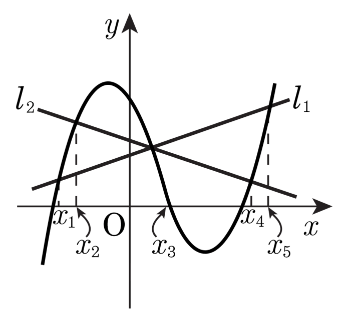
① p^3 ② $-p^3 + 2p$ ③ $-3p^3$

④ $3p^3 - 6p$ ⑤ $p^3 - 8p$

해설

$x^3 - p = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면
$\alpha^3 - p = 0$, $\beta^3 - p = 0$, $\gamma^3 - p = 0$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$,
$\alpha\beta\gamma = p$이 성립한다.
이 때,
$g(\alpha)b(\beta)g(\gamma) = (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) = (p - 2\alpha)(p - 2\beta)(p - 2\gamma)$
$= p^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p - 8\alpha\beta\gamma = p^3 - 8p$

19. 삼차방정식 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 l_1, l_2와 아래의 그림과 같이 만나고 있다. 이들 교점의 x좌표를 차례로, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 할 때, x_1, x_2, x_4, x_5의 관계가 옳은 것은?



① $x_1+x_5=x_2+x_4$　　② $x_1+x_4=x_2+x_5$

③ $x_1x_2=x_4x_5$　　④ $x_1x_4=x_2x_5$

⑤ $x_1^2+x_2^2=x_4^2x_5^2$

해설

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)\cdots f(x)$

$y=px+q\ (p\neq 0)\cdots l_1$

$y=rx+s\ (r\neq 0)\cdots l_2$로 놓으면

$ax^3+bx^2+cx+d=px+q\cdots(\text{i})$

$ax^3+bx^2+cx+d=rx+s\cdots(\text{ii})$

(i), (ii)에서 근과 계수의 관계를 이용하면

$x_1+x_3+x_5=-\dfrac{b}{a}$

$x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}$이므로

$x_1+x_5=x_2+x_4$