1. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$

$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$

$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$

$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$

$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$

근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

2. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$

② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$

④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\
 & & 1 & 1 & 1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

3. $x(x-1)(x+1)-6=0$의 세근을 구하면?

① $2,\ -1,\ -3$ ② $-2,\ 1,\ -3$ ③ $2,\ 1,\ -3$

④ $-2,\ -1 \pm \sqrt{2}i$ ⑤ $2,\ -1 \pm \sqrt{2}i$

해설

준식$= x(x^2-1)-6 = x^3-x-6=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore\ x=2, -1 \pm \sqrt{2}i$

4. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\dfrac{1}{2}$, 2

② $x = -1$ (중근), $\dfrac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\dfrac{1}{2}$, 2

④ $x = -1$, $\dfrac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\dfrac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \dfrac{1}{2},\ 2$

5. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1	1	-2	1	0	-4
		-1	3	-4	4
2	1	-3	4	-4	0
		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

$(x+1)(x-2)(x^2 - x + 2) = 0$

따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

6. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2+2ax+a=0$이 중근을 갖도록 하는 양수 a의 값과 그 때의 중근 α의 값의 합 $a+\alpha$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법을 이용한다$f(-1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 2a & a \\ & & -1 & -a & -a \\ \hline & 1 & a & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x^2+ax+a)=0$

$x^2+ax+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 0이 아니므로

x^2+ax+a가 중근을 갖는다.

중근일 조건 : 판별식$=0$

$\therefore \quad a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$또는 $a=4$

$\therefore$양수 $a=4 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+4=0(x+2)^2=0$

$\Rightarrow$중근 $\alpha=-2 \Rightarrow \quad a+\alpha=2$

7. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \dfrac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

8. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

9. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

10. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

11. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실근은 -1, 2 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

12. 방정식 $x^6-1=0$의 해가 <u>아닌</u> 것은?

① -1　　② 1　　③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=-1,\ 1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

13. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　② $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　③ $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1　⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
 & & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

14. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면

$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$

$\therefore\ \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$

15. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3&=t^2-8t+12+3\\&=t^2-8t+15\\&=(t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

16. x에 관한 방정식 $x^{1998}+10x-3=0$의 모든 근(1998개)에 대하여 각각의 근을 1998 제곱한 합을 구하면?

① 0　　② -10　　③ 5994

④ -5994　　⑤ -59940

해설

$x^{1998}+10x-3=0$의 각각의 근을 $x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_{1998}$이라 하면

$x^{1998}=-10x+3$에서

$x_1^{1998}=-10x_1+3$, x_2^{1998}

$=-10x_2+3$, x_3^{1998}

$=-10x_3+3\cdots\ {x_{1998}}^{1998}$

$=-10x_{1998}+3$

$\therefore\ {x_1}^{1998}+{x_2}^{1998}+{x_3}^{1998}+\cdots{x_{1998}}^{1998}$

$=-10(x_1+x_2+x_3+...+x_{1998})+3\times1998$

$=0+3\times1998=5994$ ($\because x_1+x_2+\cdots x_{1998}=0$)

17. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3-6a=b^3-6b=c^3-6c=-1$을 만족시킬 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

① 1　　② -1　　③ 3　　④ -3　　⑤ 6

해설

$a^3-6a=-1,\ b^3-6b=-1,\ c^3-6c=-1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3-6x=-1$
즉, $x^3-6x+1=0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a+b+c=0,\ ab+bc+ca=6,\ abc=-1$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
에서 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3=3abc=3\cdot(-1)=-3$

18. $f(x)=x^3-p$, $g(x)=x^3-2x$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 p로 바르게 나타낸 것은?

① p^3 ② $-p^3+2p$ ③ $-3p^3$

④ $3p^3-6p$ ⑤ p^3-8p

해설

$x^3-p=0$ 의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면

$\alpha^3-p=0,\ \beta^3-p=0,\ \gamma^3-p=0$

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,$

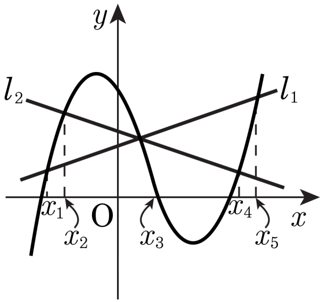
$\alpha\beta\gamma=p$이 성립한다.

이 때,

$g(\alpha)b(\beta)g(\gamma)=(\alpha^3-2\alpha)(\beta^3-2\beta)(\gamma^3-2\gamma)=(p-2\alpha)(p-2\beta)(p-2\gamma)$

$=p^3-2(\alpha+\beta+\gamma)p^2+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)p-8\alpha\beta\gamma=p^3-8p$

19. 삼차방정식 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 l_1, l_2와 아래의 그림과 같이 만나고 있다. 이들 교점의 x좌표를 차례로, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 할 때, x_1, x_2, x_4, x_5의 관계가 옳은 것은?



① $x_1+x_5=x_2+x_4$
② $x_1+x_4=x_2+x_5$
③ $x_1x_2=x_4x_5$
④ $x_1x_4=x_2x_5$
⑤ $x_1^2+x_2^2=x_4^2x_5^2$

해설

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)\cdots f(x)$
$y=px+q\ (p\neq 0)\cdots l_1$
$y=rx+s\ (r\neq 0)\cdots l_2$로 놓으면
$ax^3+bx^2+cx+d=px+q\cdots(\text{i})$
$ax^3+bx^2+cx+d=rx+s\cdots(\text{ii})$
(i), (ii)에서 근과 계수의 관계를 이용하면

$x_1+x_3+x_5=-\dfrac{b}{a}$

$x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}$이므로

$x_1+x_5=x_2+x_4$