

1. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 a, b, c 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 8 + c \geq 9$$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 6 + c \geq 7$$

$$\therefore b = 8 \text{ 또는 } 9$$

1), 2)에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3, b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

2. 한 자리 자연수 a 에 대하여 a 는 b 의 $\frac{1}{2}$ 보다 크고, b 는 c 의 $\frac{1}{3}$ 보다 크고, c 는 d 의 $\frac{1}{4}$ 보다 클 때, d 의 최댓값을 구하여라. (단, b, c, d 는 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 215

해설

$$1 \leq a \leq 9 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a > \frac{1}{2}b \cdots \textcircled{㉡}$$

$$b > \frac{1}{3}c \cdots \textcircled{㉢}$$

$$c > \frac{1}{4}d \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠} \text{ 에서 } 2 \leq 2a \leq 18$$

$$\textcircled{㉡} \text{ 에서 } b < 2a \quad \therefore b < 18, 3b < 54$$

$$\textcircled{㉢} \text{ 에서 } c < 3b \quad \therefore c < 54, 4c < 216$$

$$\textcircled{㉣} \text{ 에서 } d < 4c \quad \therefore d < 216$$

따라서 자연수 d 의 최댓값은 215 이다.

3. 명수, 우빈, 지원이는 각자 그림 1 점씩을 그려 교무실 앞에 나란히 전시해 놓고, 지나가시는 선생님들께 가장 마음에 드는 그림 1 개만 골라 그림 옆 종이에 스티커를 붙여달라고 하였다. 처음에 총 40 개의 스티커가 있었고, 중간 점검 결과 명수는 10 표, 우빈이는 8 표, 지원이는 7 표를 얻었을 때, 남은 스티커의 획득 여부에 관계없이 명수가 가장 많은 스티커를 받으려면 최소 몇 개의 스티커를 더 얻어야 하는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

중간 점검 결과는 $10+8+7=25$ (개) 이므로 남은 스티커 개수는 $40-25=15$ (개) 이다.

명수가 가장 많은 스티커를 얻기 위해 점전을 펼칠 때는 2 등인 우빈이와 경쟁할 때이고, 명수가 x 개의 스티커를 얻었다고 가정하면 그로부터 명수가 얻게 되는 스티커의 수의 합이 나머지 $(15-x)$ 개를 모두 우빈이가 얻는 결과보다도 많으면 무조건 명수는 가장 많은 스티커를 받게 된다. 즉,

$$10+x > 8+(15-x)$$

$$\therefore x > \frac{13}{2}$$

따라서 명수가 가장 많은 스티커를 받는다는 사실이 확정되기 위해서는 최소 7 개의 스티커를 더 얻어야 한다.

4. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $20 < a < 30$ 이고, $1 - \frac{1}{a}$ 을 소수로 나타내면 무한소수이다. $6a < 100b < 7a$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$$6a < 100b < 7a \text{ 이면 } 0.06a < b < 0.07a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$20 < a < 30 \text{ 이므로 } 0.06 \times 20 < b < 0.07 \times 30$$

$$1.2 < b < 2.1 \text{ 이므로 } b = 2$$

$$\textcircled{㉠} \text{ 에서 } 0.06a < 2 < 0.07a$$

$$0.06a < 2 \text{ 는 } a < 33. \times \times \times$$

$$2 < 0.07a \text{ 는 } a > 28. \times \times \times$$

$$\therefore 28. \times \times \times < a < 33. \times \times \times$$

$1 - \frac{1}{a}$ 을 소수로 나타냈을 때 무한소수하려면 $\frac{1}{a}$ 이 무한소수이어야 하고 a 는 2 와 5 이외의 소인수를 가져야 한다.

따라서 $a = 29, 30, 31, 32, 33$ 이고 $20 < a < 30$ 이므로 a 의 값은 $a = 29$ 이다.

$$\therefore a + b = 29 + 2 = 31$$

5. 1 시간에 10ton 의 물이 유입되고 있는 댐이 있다. 이 댐에는 800ton 의 물이 있었다. 이 댐의 물을 방출하여 댐의 물이 200ton 이하가 되도록 하려고 한다. 매시간 일정한 양의 물을 방출하여 15 시간이 경과한 후, 남은 물의 양이 전체의 62.5 % 가 되었다. 같은 양의 물을 방출한다면 댐의 물이 200ton 이하가 될 때까지 최소한 얼마의 시간이 걸릴 것인지 구하여라.

▶ 답 : 시간

▷ 정답 : 15시간

해설

15 시간 동안 줄어든 물의 양은 $800 \times (1 - 0.625) = 300$ (톤)
이므로

1 시간당 댐에서 방출되는 물의 양을 x 톤이라 하면

$$(x - 10) \times 15 = 300$$

$$x = 30$$

현재 남아있는 물의 양은 500 톤이고 200 톤 이하가 되기 위해서는 300 톤 이상의 물이 추가로 줄어들어야 한다.

이를 위해 필요한 시간을 y 시간이라 하면

$$(30 - 10) \times y \geq 300$$

$$\therefore y \geq 15$$

따라서 댐의 물이 200 톤 이하가 되기 위해서는 최소 15 시간이 있어야 한다.

6. 제품 A, B, C 를 만드는 데 필요한 부품 P, Q, R 의 개수는 다음 표와 같다.

	P	Q	R
A	2		4
B	2	1	2
C		1	1

어느 공장에서 부품 P, Q, R 을 각각 1000 씩 구매하여, 부품 P 는 440 개, 부품 Q 는 670 개를 남기고, 부품 R 은 230 개 이상을 남겼을 때, 만들 수 있는 제품 B 의 최소 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 227 개

해설

제품 A, B, C 의 개수를 각각 x 개, y 개, z 개 로 놓고 사용한 부품의 개수를 구하면

부품 P 의 개수는

$$2x + 2y = 1000 - 440 = 560, x + y = 280 \cdots \textcircled{㉠}$$

부품 Q 의 개수는

$$y + z = 1000 - 670 = 330, y + z = 330 \cdots \textcircled{㉡}$$

부품 R 의 개수는

$$4x + 2y + z < 1000 - 230 = 770,$$

$$4x + 2y + z < 770 \cdots \textcircled{㉢}$$

이므로 ㉠, ㉡ 에서 x, z 를 y 에 관해 나타내면 $x = 280 - y,$

$$z = 330 - y$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$4(280 - y) + 2y + (330 - y) < 770$$

$$1120 - 4y + 2y + 330 - y < 770$$

$$-3y < -680 \quad \therefore y > 226. \times \times \times$$

만들 수 있는 제품 B 의 최소 개수는 227 개이다.

7. 사료 A, B 의 1g 당 영양소 C, D 의 함유량과 100g 당 단가는 다음과 같다.

	C(mg)	D(mg)	단가(원)
A	21	15	500
B	16	19	600

하루에 두 사료를 모두 합해 0.3kg 먹는 어떤 동물의 1 일 영양소 섭취량이 C 는 60g 이하, D 는 50g 이하가 되게 하려고 한다. 구입한 사료의 가격이 가장 쌀 때, 사료 B 의 무게를 구하여라.

▶ 답 : g

▷ 정답 : 60 g

해설

사료 A 의 무게를 x g 이라 하면 사료 B 의 무게는 $(300 - x)$ g 이다.

C 가 60g 이하이므로

$$0.21x + 0.16(300 - x) \leq 60 \cdots \textcircled{㉠}$$

D 가 50g 이하이므로

$$0.15x + 0.19(300 - x) \leq 50 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠ 을 풀면 $x \leq 240$

㉡ 을 풀면 $x \geq 175$

$$\therefore 175 \leq x \leq 240$$

구입한 사료의 가격이 가장 싸려면 A 를 많이 구입해야 하고 B 는 적게 구입해야 한다. 따라서 구하는 사료 B 의 무게는 $300 - 240 = 60$ (g) 이다.

8. 6 톤의 물이 들어있는 물탱크에서 1 분에 0.1 톤의 물을 빼내는 양수기를 사용하여 물을 빼내려고 한다. 이 물탱크에는 시간당 일정한 양의 물이 유입된다. 물을 뺀 지 30 분이 지난 후, 남은 물의 양이 전체의 75% 일 때, 똑같은 양수기를 최소 몇 대 더 사용하여야 물을 빼기 시작한 지 1 시간 이내에 물을 다 뺄 수 있겠는지 구하여라.



답 :

대



정답 : 1대

해설

1 분에 0.1 톤 씩 빼냈을 때, 30 분 동안 빼낸 물의 양은 3 톤이고, 물탱크 안의 물의 양은 6 톤의 75%, 즉 4.5 톤이므로 30 분 동안 유입된 물의 양은 1.5 톤이다. 따라서 1 분에 0.05 톤의 물이 유입된 것을 알 수 있다.

남은 30 분 동안 4.5 톤의 물을 빼내야 하므로 1 분에 빼내는 물의 양을 x 톤이라 하면

1 분 동안 x 톤의 물을 빠져나가고 0.05 톤의 물이 유입되므로 물탱크에서 줄어드는 물의 양은 $(x - 0.05)$ 톤이다.

그런데 30 분 동안 4.5 톤 이상의 물을 빼내야 하므로

$$30(x - 0.05) \geq 4.5 \quad \therefore x \geq 0.2$$

따라서 1 분에 0.2 톤 이상의 물이 빠져나가려면 똑같은 양수기를 최소 1 대 더 사용해야 한다.

9. 여러 개의 4g 짜리 추 A 와 6g 짜리 추 B의 무게의 합은 0.1kg 이다. A 의 개수는 B 의 개수보다 많고, B 의 개수의 2 배보다는 적을 때, 두 추의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21 개

해설

6g 짜리 추 B 의 개수가 b 개 있다고 하면

4g 짜리 추 A 는 $\frac{100 - 6b}{4}$ 개 있다.

따라서 $b < \frac{100 - 6b}{4} < 2b$ 에서

$$\frac{50}{7} < b < 10$$

$$\therefore b = 8, 9$$

추 A 의 개수인 $\frac{100 - 6b}{4}$ 가 자연수일 경우는 $b = 8$ 일 때이다.

따라서 추 A 의 개수는 13 개, 추 B 의 개수는 8 개

두 추의 개수의 합은 $13 + 8 = 21$ (개)

10. 프로야구 팀 A, B 의 오늘자 승률을 비교해보면, 20 경기를 치른 A 팀의 승률이 14 경기를 치른 B 팀의 승률보다 높았고, 두 팀의 승수의 합은 20 승이었다. 만약 다음 경기부터 양 팀이 6 연승을 달린다면 A 팀과 B 팀의 승률 순위가 바뀐다고 할 때, 오늘자 기록에서 A 팀이 패한 회수를 구하여라. (단, 무승부는 없다.)

▶ 답 : 회

▷ 정답 : 8 회

해설

오늘까지 A 팀이 이긴 경기 수를 x 회라 하면 B 팀이 이긴 경기 수는 $(20 - x)$ 회이다.

A 팀의 오늘까지의 승률은 $\frac{x}{20}$, B 팀의 오늘까지의 승률은

$\frac{20 - x}{14}$ 이므로

$$\frac{x}{20} > \frac{20 - x}{14} \quad \therefore x > \frac{200}{17} \dots \textcircled{1}$$

6 경기를 더 이겼을 때, A 팀의 승률은 $\frac{x + 6}{26}$, B 팀의 승률은

$\frac{26 - x}{20}$ 이므로

$$\frac{x + 6}{26} < \frac{26 - x}{20} \quad \therefore x < \frac{278}{23} \dots \textcircled{2}$$

①, ② 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{200}{17} < x < \frac{278}{23} \quad \therefore 11. \times \times \times < x < 12. \times \times \times$$

따라서 $x = 12$ 경기이므로 오늘자 기록에서 A 팀이 패한 횟수는 8 회이다.