

1. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

2. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

- ① -3
- ② -1
- ③ 0
- ④ 3
- ⑤ 5

해설

계수의 합 $a + b + c + d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면

$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$

$\therefore a + b + c + d = 3$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$

$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$

즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1		2	-3	-1	1	
		2	-1	-2		
1		2	-1	-2	-1	← d
		2	1			
1		2	1	-1	←	c
		2				
		2	3	←	b	
		↑				
		a				

$\therefore a + b + c + d = 3$

3. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i=0, 1, 2, \cdots, 20$)
- ① 2^{10} ② $2^{10}-1$ ③ 2
④ 1 ⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이므로
 $x=1$ 을 대입하면
 $1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots\textcircled{㉠}$
또, 이 식에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots\textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$
 $\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때의 나머지가 $3x$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① 3

② $3x + 3$

③ $3x - 3$

④ $6x - 9$

⑤ $9x + 6$

해설

$$f(x) = (x-2)(x-1)Q(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)Q'(x) + 3x$$

$\therefore f(2) = 3, f(3) = 9f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q''(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 9$$

$$a = 6, b = -9$$

$\therefore$ 나머지는 $6x - 9$

5. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$$w^2 + w + 1 = 0, \text{ 양변에 } (w - 1) \text{ 을 곱하면}$$

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지= 3

6. x 에 대한 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 8$ 은 $(x + 2)^2$ 으로 나누어 떨어지고, $1 - f(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어 떨어질 때, $f(x)$ 의 상수항은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + 8 = (x + 2)^2(ax + b) \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - f(x) = (x^2 - 1)Q(x) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } f(1) = 1, f(-1) = 1$$

그러므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$1 + 8 = 9(a + b) \cdots \textcircled{3}$$

$$1 + 8 = -a + b \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}\text{에서 } a = -4, b = 5$$

$$\therefore f(x) = (x + 2)^2(-4x + 5) - 8$$

$$\therefore \text{상수항은 } f(0) = 2^2 \cdot 5 - 8 = 12$$

7. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 는 $x+2$ 로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $x+f(x)$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $x^2+f(x)g(x)$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $f(g(x))-x$

- $\textcircled{\text{①}}$ $\textcircled{\text{㉠}}$
- $\textcircled{\text{②}}$ $\textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{③}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{④}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{⑤}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$
두식을 연립하면, $f(-2)=2, g(-2)=-2$
 $\textcircled{\text{㉠}}$: $x+f(x) \rightarrow x=-2$ 를 대입하면
 $-2+f(-2)=0$
 $\textcircled{\text{㉡}}$: $x^2+f(x)g(x) \rightarrow x=-2$ 를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$
 $\textcircled{\text{㉢}}$: $f(g(x))-x \rightarrow x=-2$ 를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

8. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ \therefore & a = c - 2, 1 = 2 - c, b = c \\ & c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ \therefore & a - b = -2 \end{aligned}$$

9. n 이 자연수일 때, x 의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$ 이 될 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$ ①
 $x=3$ 을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$
 $\therefore b=-3a-9\cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
 $x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
 $\therefore (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$
양변을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 비교하면
 $x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$
 $x=3$ 을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n \therefore 6+a=1 \therefore a=-5$
②에서 $b=6$
 $\therefore a=-5, b=6 \therefore a+b=1$

10. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$

$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 를 하면

$2(a+b) = 6, a+b = 3$

11. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$$
$$\therefore f(-2) = -9$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

i) $f(-1) = 3$ 에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$ 에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$ 에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -2, b = -1, c = 5$$
$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$
$$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$$

12. 다항식 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 떨어지고, $x-2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $P(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때 나머지는?

① x

② $-x+1$

③ $x+1$

④ $-2x+2$

⑤ $2x+2$

해설

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

$$P(x) = (x-2)Q'(x) + 3$$

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q''(x) + ax + b$$

$$P(-1) = 0, \quad P(2) = 3 \text{ 이므로,}$$

$$-a + b = 0, \quad 2a + b = 3$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

따라서 나머지는 $x+1$ 이다.

13. x 에 대한 항등식 $x^{1997} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

- ① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ 라 하면
 $x = 1$ 일 때, $3 = a + b$
 $x = -1$ 일 때, $-1 = -a + b$
 $\therefore a = 2, b = 1$
 $\therefore x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 1$
 $x^{1997} - x = (x^2 - 1)Q(x)$
 $x(x-1)(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1)$
 $= (x-1)(x+1)Q(x)$
 $\therefore x(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1) = (x+1)Q(x)$
 $Q(1)$ 이 $Q(x)$ 의 모든 계수의 합이므로 $x = 1$ 을 대입하면
 $2Q(1) = 1996 \quad \therefore Q(1) = \frac{1996}{2} = 998$

14. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족
시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{5}{6}$
- ⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$
$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$
$$f(x) \text{는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$
$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$
$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\dots(x-10)$$
$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\dots(-11)$$
$$= -a \cdot 11! (\text{단, } 11! = 1 \times 2 \times \dots \times 11)$$
$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$
$$f(11) = 12P(11) - 11$$
$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = -1$$
$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

15. 다항식 x^6 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때, $Q(x)$ 를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나눌 때의 나머지는?

- ① $\frac{1}{64}$ ② $-\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a = -\frac{1}{2}$ 로 놓으면

$$R = a^6$$

$x^6 = (x - a)Q(x) + a^6$ 에서

$$Q(x) = \frac{x^6 - a^6}{x - a}$$

$$= x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5$$

$Q(x)$ 를 $x - a$ 로 나눈 나머지는 $Q(a)$ 의 값과 같으므로 $Q(a) = 6a^5$

$$\text{따라서 } Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{3}{16}$$

16. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

- ① $af(a) + bf(b)$ ② $-af(a) + bf(b)$
 ③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$ ④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$
 ⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$$\begin{aligned}
 R(x) &= cx + d \text{라 하면} \\
 f(a) &= ac + d, f(b) = bc + d \\
 \therefore f(a) - f(b) &= (a - b)c \\
 \therefore c &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \\
 \text{또 } f(a) + f(b) &= (a + b)c + 2d \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d \\
 \therefore 2d &= f(a) + f(b) - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{(a - b) \{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + \\
 &\quad bf(a) - bf(b)\}] \\
 &= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) - \\
 &\quad bf(a) + bf(b)\} = \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b} \\
 \therefore d &= \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 \text{따라서 } R(a + b) &= (a + b)c + d \\
 &= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}
 \end{aligned}$$

17. 다항식 $f(x)$ 는 다항식 $g(x)$ 로 나누어떨어진다. $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고, $Q(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$ 라고 할 때, $f(x)$ 를 $\{g(x)\}^2$ 으로 나눈 몫과 나머지는?

- ① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$
- ② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$
- ③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$
- ④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$
- ⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) \cdots \textcircled{1}$$
$$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$$

$r(x)$ 가 $g(x)$ 보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$ 는 $\{g(x)\}^2$ 보다 낮은 차수이다.

따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$ 이고 몫은 $h(x)$ 이다.