1. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

2. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a,b,c,d 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x=2$ 를 양변에 대입하면
$16-12-2+1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=3$

해설

a,b,c,d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d,c,b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	-3	-1	1	
		2	-1	-2	
1	2	-1	-2	$\boxed{-1}$	$\leftarrow$ d
		2	1		
1	2	1	$\boxed{-1}$	$\leftarrow$ c	
		2			
	2	$\boxed{3}$	$\leftarrow$ b		
	$\uparrow$				
	a				

$\therefore\ a+b+c+d=3$

3. x에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$의 값은? (단, a_i는 상수이고 $i=0,\ 1,\ 2,\cdots,20$)

① 2^{10}　② $2^{10}-1$　③ 2

④ 1　⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이므로

$x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots$㉠

또, 이 식에 $x=-1$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots$㉡

㉠+㉡을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

4. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3 ② $3x+3$ ③ $3x-3$

④ $6x-9$ ⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

5. $P(x)=x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$ ② $4x-1$ ③ 5

④ 4 ⑤ 3

해설

$P(x^6)=x^{12}+x^6+1$

$x^2+x+1=0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2+w+1=0$, 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면

$w^3-1=0$, $w^3=1$

$x^{12}+x^6+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ 에

w 를 대입하면,

$(w^3)^4+(w^3)^2+1=(w^2+w+1)Q(w)+aw+b$

$3=aw+b$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a=0, b=3$

$\therefore$ 나머지$=3$

6. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

7. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $x+f(x)$

ㄴ $x^2+f(x)g(x)$

ㄷ $f(g(x))-x$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$

두식을 연립하면, $f(-2)=2,\ g(-2)=-2$

ㄱ : $x+f(x) \to x=-2$를 대입하면

$-2+f(-2)=0$

ㄴ : $x^2+f(x)g(x) \to x=-2$를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$

ㄷ : $f(g(x))-x \to x=-2$를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

8. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$가 $x^2 - x + 1$로 나누어떨어질 때, $a - b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x^3 + ax^2 + x + b$

$= (x^2 - x + 1)(2x + c)$

$= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c$

$\therefore\ a = c - 2,\ 1 = 2 - c,\ b = c$

$c = 1$이므로 $a = -1, b = 1$

$\therefore\ a - b = -2$

9. n이 자연수일 때, x의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$①

$x=3$을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$

$\therefore\ b=-3a-9\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$\therefore\ (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

양변을 $x-3$으로 나눈 몫을 비교하면

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

$x=3$을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n\ \ \therefore\ 6+a=1\ \therefore\ a=-5$

②에서 $b=6$

$\therefore\ a=-5,\ b=6\ \ \therefore\ a+b=1$

10. x에 관한 3차 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2, $x+1$로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라 하면 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$라 하면

$f(1) = 2,\ f(-1) = 4$에서

$p + a + q + b = 2 \cdots$ ㉠

$-p + a - q + b = 4 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡를 하면

$2(a+b) = 6,\ a + b = 3$

11. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)+3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

12. 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누면 떨어지고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때 나머지는?

① x ② $-x+1$ ③ $x+1$

④ $-2x+2$ ⑤ $2x+2$

해설

$P(x)=(x+1)Q(x)$

$P(x)=(x-2)Q'(x)+3$

$P(x)=(x+1)(x-2)Q''(x)+ax+b$

$P(-1)=0,\quad P(2)=3$이므로,

$-a+b=0,\quad 2a+b=3$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

따라서 나머지는 $x+1$이다.

13. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

14. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$(단, $k=0,1,\ 2,\ \cdots,\ 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ 1

해설

$P(k)=\dfrac{k}{k+1}\Rightarrow(k+1)P(k)-k=0$

$f(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면

$f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots$

$=f(10)=0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1)=1=a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$=-a\cdot 11!$(단, $11!=1\times 2\times\cdots\times 11$)

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{11!}$

$f(11)=12P(11)-11$

$=-\dfrac{1}{11!}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1=-1$

$\therefore\ P(11)=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$

15. 다항식 x^6을 $x+\dfrac{1}{2}$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(x)$를 $x+\dfrac{1}{2}$로 나눌 때의 나머지는?

① $\dfrac{1}{64}$ ② $-\dfrac{1}{32}$ ③ $\dfrac{3}{32}$ ④ $-\dfrac{3}{16}$ ⑤ $\dfrac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6$

$a=-\dfrac{1}{2}$로 놓으면

$R=a^6$

$x^6=(x-a)Q(x)+a^6$에서

$$Q(x)=\frac{x^6-a^6}{x-a}$$
$$=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$$

$Q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $Q(a)$의 값과 같으므로 $Q(a)=6a^5$

따라서 $Q\left(-\dfrac{1}{2}\right)=6\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=-\dfrac{3}{16}$

16. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$

② $-af(a)+bf(b)$

③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$

④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$

⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\{f(a)+f(b)\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$

17. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.