1. 삼차다항식 $f(x)$와 이차다항식 $g(x)$가 다음의 세 조건을 만족한다.

> (A) $f(x)$를 $g(x)$로 나누면, 몫이 $x-2$이고 나머지가 $x+6$이다.
> (B) $f(x)-(x-7)g(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
> (C) 방정식 $g(x)=2x+5$의 해는 $-2, 1$이다.

이 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x)=(x-2)g(x)+x+6$이므로 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-3g(-1)+5 \cdots\cdots$ ㉠
(B)에서 $f(-1)+8g(-1)=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면,
$f(-1)=8,\ g(-1)=-1 \cdots\cdots$ ㉢
(C)에서 $g(x)-(2x+5)=0$의 해가 $-2,\ 1$이므로,
$g(x)-(2x+5)=a(x+2)(x-1)$
$g(x)=a(x+2)(x-1)+2x+5$
㉢에서 $g(-1)=-2a+3=-1$이므로 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2x^2+4x+1$
$\therefore\ f(x)=(x-2)g(x)+x+6$
$\qquad =2x^3-6x+4=2(x-1)^2(x+2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것은 -2이다.

2. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1　　② -1　　③ i　　④ $-i$　　⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x-1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore\ x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$

3. 삼차방정식 $x^3+27=0$ 의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

4. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$ 공통근 : $x=1$

5. 삼차방정식 $x^3-7x^2+9x+9=0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 $a,\ b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3-7x^2+9x+9=0$

$(x-3)(x^2-4x-3)=0$

$x^2-4x-3=0$의 두 근이 $a,\ b(\because$ 무리수)

$a+b=4$

6. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8　② -2　③ 1　④ 4　⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$

$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$

$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$

$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$

$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$

근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

7. 삼차방정식 $x^3-(7\cdot2^3)x^2+(7\cdot2^7)x-2^{12}=0$ 의 세 근을 $\alpha,\beta,\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$ 라 할 때, $\alpha\le m\le\gamma$ 인 정수 m 의 개수를 구하면?

① 23 개 ② 24 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 27 개

해설

$f(x)=x^3-(7\cdot2^3)x^2+(7\cdot2^7)x-2^{12}$ 이라 할 때 $f(2^3)=f(2^4)=f(2^5)=0$ 이므로

$f(x)=(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)$

$\alpha<\beta<\gamma$ 에서 $\alpha=2^3,\ \gamma=2^5$ 이므로

$2^3\le m\le2^5$

$\therefore$ 정수 m 의 개수는 $2^5-2^3+1=25$

8. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

9. 방정식 $x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

해설

$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$ 으로 놓으면 $f(-1) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\
 & & -1 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
2 & 1 & 0 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

$\therefore\ (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

10. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2+x-12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$또는 $x = 1$또는 $x = 3$

$\therefore\ -4+1+3 = 0$

11. x에 관한 삼차방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-\gamma^3)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$x^3+x^2+x+1=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=-1$
또한 $x^3+x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$를 곱하면
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=0,\quad x^4=1$
$\therefore \alpha^4=\beta^4=\gamma^4=1,\quad \alpha^3=\frac{1}{\alpha}, \beta^3=\frac{1}{\beta}, \gamma^3=\frac{1}{\gamma}$
$\therefore$(준식)$=(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\beta})(1-\frac{1}{\gamma})=1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha})-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$
$=1-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1+1+1+1=4$

해설

$x^3+x^2+x+1=0$을 인수분해 하면 $(x+1)(x^2+1)=0$
그러므로 $\alpha=-1, \beta=i, r=-i$라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없으므로)
$(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-r^3)=(1+1)(1+i)(1-i)$
$=2(1+1)=4$

12. 삼차방정식 $x^3 + px + 2 = 0$ 의 세 근이 모두 정수일 때, p 의 값을 구하면?

① 4 ② -3 ③ -2 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 근을 α , β , γ 라고 하면

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\alpha\beta\gamma = -2 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢에서

$-2 = (-1)\times1\times2 = 1\times1\times(-2) = (-1)(-1)(-2)$

㉠에서 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이어야 하므로

$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$

㉡에서 $p = 1\times1 + 1\times(-2) + (-2)\times1 = -3$

13. x에 관한 방정식 $x^{1998}+10x-3=0$의 모든 근(1998 개)에 대하여 각각의 근을 1998 제곱한 합을 구하면?

① 0　　② -10　　③ 5994

④ -5994　　⑤ -59940

해설

$x^{1998}+10x-3=0$의 각각의 근을 $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_{1998}$이라 하면

$x^{1998}=-10x+3$ 에서

$x_1^{1998}=-10x_1+3$, x_2^{1998}

$=-10x_2+3$, x_3^{1998}

$=-10x_3+3 \cdots$ ${x_{1998}}^{1998}$

$=-10x_{1998}+3$

$\therefore {x_1}^{1998}+{x_2}^{1998}+{x_3}^{1998}+\cdots {x_{1998}}^{1998}$

$=-10(x_1+x_2+x_3+ ... +x_{1998})+3\times 1998$

$=0+3\times 1998=5994$ ($\because x_1+x_2+\cdots x_{1998}=0$)

14. 삼차방정식 $x^3 - mx - 2 = 0$의 근이 모두 정수일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 3$

해설

세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \geq \beta \geq \gamma)$ 라 하면
$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \cdots\cdots ①$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -m \quad \cdots\cdots ②$
$\alpha\beta\gamma = 2 \quad \cdots\cdots ③$
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 는 정수이므로 ③에서
$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2, -1, -1)\ ,\ (1, -1, -2),\ (2,\ 1,\ 1)$
이 중에서 ①에 맞는 것은
$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2,\ -1,\ -1)$
따라서 ②로부터 $-2 + 1 - 2 = -m$
$\therefore\ m = 3$