1. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

2. $x^2+xy-2y^2-2x-y+1$을 인수분해하면?

① $(x+y-1)(x+2y-1)$　② $(x-y-1)(x+2y-1)$

③ $(x-y+1)(x+2y-1)$　④ $(x-y-1)(x+2y+1)$

⑤ $(x+y+1)(x+2y-1)$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$x^2+(y-2)x-2y^2-y+1$

$=\{x-(y+1)\}\{x+(2y-1)\}$

$=(x-y-1)(x+2y-1)$

3. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$ ② $2x - y + 2$ ③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$ ⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$

$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

4. $2x^2+2y^2+5xy-x+y-1$이 인수인 것은?

① $2x+y+1$ ② $2x+y-1$ ③ $2x-y-1$

④ $x+2y+1$ ⑤ $x-2y-1$

해설

$2x^2+2y^2+5xy-x+y-1$

$=2x^2+(5y-1)x+(y+1)(2y-1)$

$=(x+2y-1)(2x+y+1)$

5. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

6. $a^2+ab+a-b-2$의 인수로 적당한 것은?

① $a-b-2$　② $a+b-2$　③ $a+b+2$

④ $a+1$　⑤ $b+1$

해설

a에 관한 내림차순으로 정리 후 인수분해 한다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2+ab+a-b-2\\ &= a^2+(b+1)a-b-2\\ &= (a+b+2)(a-1)\end{aligned}$$

7. 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$ ② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$ ④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

해설

(준 식) $= 2x^2 - (y + 4)x - (y^2 - y - 2)$

$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$

$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

8. $3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$을 인수분해 하면?

① $(x+y+1)(3x+y-3)$ ② $(x-y+1)(3x-y-3)$

③ $(3x+y+1)(x-y-3)$ ④ $(x+y+1)(3x-y-3)$

⑤ $(x-y-1)(3x-y-3)$

해설

$3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$
$= \{3x - (y+3)\}(x+y+1)$
$= (x+y+1)(3x-y-3)$

9. 다음 중 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$의 인수인 것은?

① $x+y+2$ ② $x-y+2$ ③ $x+2y+1$

④ $x-2y+1$ ⑤ $x+y+1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$

$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$

$=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$

$=(x+2y+1)(x+y-2)$

10. $3x^2+2xy-y^2-x+3y-2$의 인수인 것은?

① $2x+y+1$　② $x+y+1$　③ $2x-y+1$

④ $3x-y+2$　⑤ $3x+y+2$

해설

준 식을 내림차순으로 정리하면
$3x^2+2xy-x-y^2+3y-2$
$=3x^2+(2y-1)x-(y-1)(y-2)$
인수분해하면 $(x+y-1)(3x-y+2)$

11. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$ ④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

(준식) $=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

12. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2-\boxed{\text{(가)}}a+\boxed{\text{(나)}}(b-c)\\
&=\boxed{\text{(다)}}\{a^2-\boxed{\text{(라)}}a+\boxed{\text{(나)}}\}\\
&=(b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
\end{aligned}
$$

① (가) (b^2-c^2) ② (나) bc ③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$ ⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2\\
&=(b-c)a^2-\boxed{(b^2-c^2)}a+\boxed{bc}(b-c)\\
&=\boxed{(b-c)}\{a^2-\boxed{(b+c)}a+\boxed{bc}\}\\
&=(b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
\end{aligned}
$$

13. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

14. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b = c$인 이등변 삼각형

② $a = c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 0\end{aligned}$$

$a^2 + b^2 = c^2$ ($\because\ a + b \neq 0$)

$\therefore$ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

15. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형　② 직각삼각형
③ 이등변삼각형　④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해 한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$
$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$
$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$
$(a+b \neq 0)$
$c^2 - a^2 - b^2 = 0$
$\therefore c^2 = a^2 + b^2$
$\therefore$ $C = 90°$인 직각삼각형

16. $a,\ b,\ c$가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$
$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$
$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$
$(a+b)\{(a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$
$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$
$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$
$\therefore a=b$인 이등변삼각형

17. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z가 빗변인 직각삼각형　② x가 빗변인 직각삼각형

③ $x=y$인 이등변삼각형　④ $y=z$인 이등변삼각형

⑤ $z=x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$
$(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+(x-y)xy=0$
$(x-y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$
$(x-y)(z+x)(z+y)=0 \therefore x=y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x=y$인 이등변삼각형

18. $a,\ b,\ c$가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형　② $a=c$인 이등변 삼각형

③ 정삼각형　④ a가 빗변인 직각 삼각형

⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$
$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$
$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$
$(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

19. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형
③ 정삼각형　④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$
$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
a, b, c는 실수이므로
$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$
$\therefore\ a=b=c$
따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

20. 실수 x, y가 $xy=6$, $x^2y+xy^2+x+y=63$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 값은?

① 13 ② $\frac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

x^2y+xy^2+x+y
$=xy(x+y)+(x+y)$
$=(xy+1)(x+y)$
$=7(x+y)=63,$
$x+y=9,\ xy=6$
$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=81-12=69$

21. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$(\text{준식})=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times 3-(-2)\times 3|=12$

22. 다음 식을 인수분해하면 $x^4-3x^2y^2+4y^4=(x^2+axy+by^2)(x^2+cxy+dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a,b,c,d는 정수)

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4+4x^2y^2+4y^4-7x^2y^2\\ &= (x^2+2y^2)^2-7x^2y^2\\ &= (x^2+\sqrt{7}xy+2y^2)(x^2-\sqrt{7}xy+2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c+d=4$

23. $2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$를 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x+ay+b)(2x+cy+d)$가 된다고 할 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$ ($\leftarrow$ x에 관하여 정리)

$=2x^2+(y+10)x-(y^2-4y-12)$

$=2x^2+(y+10)x-(y+2)(y-6)$

$=\{x+(y+2)\}\{2x-(y-6)\}$

$=(x+y+2)(2x-y+6)$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=6$

$\therefore\ a+b+c+d=8$

24. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$
$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$
$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)
$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

25. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변삼각형　② $\angle A=90°$인 직각삼각형

③ $b=c$인 이등변삼각형　④ $\angle C=90°$인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$

$\therefore$ $\angle C=90°$인 직각삼각형

26. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서
$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c\ (\because a,\ b,\ c$는 실수)
따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,
$a^2=1$
$\therefore\ a=b=c=1$
$\therefore\ a+b+c=3$

27. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$