

1. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\frac{2\omega^2+3\bar{\omega}}{\omega^{100}+1}$ 의 값을 구하면?
(단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 3 ③ 5 ④ -3 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^2+x+1=0 \text{의 두 근은} \\ \omega, \bar{\omega} \Rightarrow \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1 \\ \omega^2+\omega+1=0, \\ (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0, \omega^3=1 \\ \bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0, \\ (\bar{\omega}-1)(\bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1)=0, \\ \bar{\omega}^3-1=0, \bar{\omega}^3=1 \\ \frac{2\omega^2+3\bar{\omega}}{\omega^{100}+1}=\frac{2\omega^2+3\bar{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1} \\ =\frac{2\omega^2}{-\omega^2}+\frac{3\bar{\omega}}{-\omega^2} \\ =-2+\frac{3\omega\bar{\omega}}{-\omega^3} \\ =-2-\frac{3}{1}=-5\end{aligned}$$

2. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{\omega^2}{\omega^{10} + 1} + \frac{\omega^{10} + 1}{\omega^2}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \\ 2\omega + 1 &= -\sqrt{3}i \\ \text{양변을 제곱해서 정리하면} \\ \omega^2 + \omega + 1 &= 0 \\ \text{따라서 } x^2 + x + 1 = 0 \text{의 근이 } \omega \text{이다.} \\ (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 1 &= 0 \\ \therefore \omega^3 &= 1 \\ (\text{준식}) &= \frac{-(1 + \omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1 + \omega)} \\ &= \frac{-(\omega + 1)}{(\omega + 1)} + \frac{(\omega + 1)}{-(\omega + 1)} = -2\end{aligned}$$

3. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$ 를 만족하는 실수 a, b 를 구하면?

① $a = -1, b = 2$ ② $a = 2, b = -3$ ③ $a = -3, b = 1$

④ $a = -1, b = 1$ ⑤ $a = 1, b = 2$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \text{에서 } (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이 w 이다.

$$\therefore w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$$

$$\Rightarrow w^2 = -w - 1$$

$$\therefore 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$$

$$= 1 + 2w + 3w^2 + 4$$

$$= 1 + 2w + 3(-w - 1) + 4$$

$$= -w + 2$$

$$\therefore -w + 2 = aw + b$$

a, b 는 실수이고, w 는 허수이므로

$$a = -1, b = 2$$

4. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \bar{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$ (○)

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

③ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$\omega + \bar{\omega} = -1$

$\bar{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$

$\therefore \bar{\omega} = \omega^2$ (○)

④ $\omega^2 + \omega = -1$ (○)

⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$ (×)

5. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 하고
 $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 라 할 때, $z\bar{z}$ 의 값을 구하면?
 (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{에서} \\ w, \bar{w} &\text{는 } x^2 + x + 1 = 0 \text{의} \\ &\text{두 근이므로 근과 계수의 관계에서} \\ w + \bar{w} &= -1, \quad w\bar{w} = 1 \\ \text{또한, } z &= \frac{\omega + 1}{2\omega + 1} \text{에서 } \bar{z} = \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1} \text{이므로} \\ z\bar{z} &= \frac{w + 1}{2w + 1} \times \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1} \\ &= \frac{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1}{4w\bar{w} + 2(w + \bar{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0, \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \therefore w^2 + w + 1 &= 0, \quad w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{라 하자} \\ z &= \frac{w + 1}{2w + 1} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} \\ &= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \\ z\bar{z} &= \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6. 방정식 $x^3 = 8$ 의 한 허근을 α 라 하고, $z = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$ 이라 할 때, $4z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} x^3 = 8 \text{에서 } (x-2)(x^2+2x+4) &= 0 \\ x^2+2x+4=0 \text{의 한 허근을 } \alpha \text{라 하면} \\ \text{다른 허근은 } \bar{\alpha} \text{이므로} \\ \alpha + \bar{\alpha} &= -2, \alpha\bar{\alpha} = 4 \\ \therefore 4z\bar{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\bar{\alpha}+1}{\bar{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha+\bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha+\bar{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

7. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{의 한 근 } \omega$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n 의 최솟값은 2