**1.** 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 $\omega$라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면? (단, $\overline{w}$는 $w$의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 3 ③ 5 ④ $-3$ ⑤ $-5$

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은

$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\omega^2+\omega+1=0,$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$

$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$

$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$

$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$

$$\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$$

$$=\frac{2\omega^2}{-\omega^2}+\frac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$$

$$=-2+\frac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$$

$$=-2-\frac{3}{1}=-5$$

**2.** $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{\omega^2}{\omega^{10}+1} + \dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^2}$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

**해설**

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 $\omega$ 이다.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

$$(\text{준식}) = \frac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)}$$

$$= \frac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \frac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2$$

**3.** $x^3 = 1$의 한 허근을 $w$라 할 때, $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$를 만족하는 실수 $a, b$를 구하면?

① $a = -1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = -3$ ③ $a = -3,\ b = 1$

④ $a = -1,\ b = 1$ ⑤ $a = 1,\ b = 2$

**해설**

$x^3 - 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x^2 + x + 1 = 0$의 한 허근이 $w$이다.

$\therefore\ w^3 = 1,\ w^2 + w + 1 = 0$

$\Rightarrow\ w^2 = -w - 1$

$\therefore\ 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$

$= 1 + 2w + 3w^2 + 4$

$= 1 + 2w + 3(-w-1) + 4$

$= -w + 2$

$\therefore\ -w + 2 = aw + b$

$a,\ b$는 실수이고, $w$는 허수이므로

$a = -1,\ b = 2$

**4.** 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 $\omega$라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \overline{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

**해설**

① $\omega^3 = 1(\bigcirc)$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0(\bigcirc)$

③ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이

$\omega, \overline{\omega}$이므로

$\omega + \overline{\omega} = -1$

$\overline{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$

$\therefore \overline{\omega} = \omega^2(\bigcirc)$

④ $\omega^2 + \omega = -1(\bigcirc)$

⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1(\times)$

**5.** 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 $w$라 하고

$z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$라 할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하면?

(단, $\overline{z}$는 $z$의 켤레복소수이다)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$에서

$w,\ \overline{w}$는 $x^2 + x + 1 = 0$의

두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$

또한, $z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$에서 $\overline{z} = \dfrac{\overline{w} + 1}{2\overline{w} + 1}$이므로

$$z\overline{z} = \frac{w+1}{2w+1} \times \frac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$$

$$= \frac{w\overline{w} + (w + \overline{w}) + 1}{4w\overline{w} + 2(w + \overline{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0$ , $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ w^2 + w + 1 = 0$ , $w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$라 하자

$$z = \frac{w+1}{2w+1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$

$$z\overline{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$

**6.** 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 $\alpha$라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 $z$의 켤레복소수)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 $\alpha$라 하면

다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로

$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned}\therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2} \times \frac{2\overline{\alpha} + 1}{\overline{\alpha} + 2}\\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 4}\\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13\end{aligned}$$

**7.** 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 $\omega$라 하고 $f(n) = 1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 $n$의 최솟값은?

① 2　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x^2+x+1 = 0$의 한 근 $\omega$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2+\omega+1 = 0$

$$f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1+\frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2} = 0$$

자연수 $n$의 최솟값은 2